Карпатські математичні публікації. Т.3, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №2

УДК 517.95+511.2

Тимків І.Р.

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА З КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ОПЕРАТОРА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Тимків І.Р. *Багатоточкова задача з кратними вузлами для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №2. — С. 120–130.

Досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для лінійного параболічного за Петровським рівняння зі змінними коефіцієнтами в обмеженій циліндричній області. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку.

Вступ

Дослідження задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними розпочалось порівняно недавно. Інтерес до їх вивчення зумовлений як потребою побудови загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, так і тим, що багатоточкові задачі виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних процесів. Встановлено, що такі задачі є умовно коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників.

Багатоточкові задачі для гіперболічних та безтипних рівнянь досліджено у роботах [8, 7, 10, 11], для псевдодиференціальних рівнянь — у працях [1, 14, 17]. Локальні багатоточкові задачі для деяких класів параболічних рівнянь високого порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами вивчались у працях [12, 13], для одного класу факторизованих гіперболіко-параболічних операторів — у роботі [9]. Розв'язність нелокальних багатоточкових задач для параболічних рівнянь другого поряду вивчено у роботах [3, 16], для систем параболічних рівнянь — у праці [5].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Ключові слова і фрази: багатоточкова задача, малі знаменники, міра Лебега.

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект №29.1/005)

У даній статті, яка є розвитком праці [12], в обмеженій циліндричній області досліджено коректну розв'язність задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною (випадок кратних вузлів) та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для факторизованого параболічного оператора зі змінними за часовою та просторовими координатами коефіцієнтами.

Надалі використовуватимемо такі позначення: $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $s=(s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p$, $|s|=s_1+\cdots+s_p$; $D=\{(t,x): 0<t<T, \quad x\in Q\subset\mathbb{R}^p\}$, де Q — обмежена однозв'язна область з досить гладкою межею ∂Q, $\Sigma=\partial Q\times[0,T]$; $C^{(m,2m)}(\overline{D})$, $m\in\mathbb{N}$, — банахів простір функцій $v(t,x)$ з нормою $\|v;C^{(m,2m)}(\overline{D})\| = \sum\limits_{s_0=0}^{m}\sum\limits_{0\le s_0+|s|\le 2m}\max\limits_{(t,x)\in\overline{D}}\left|\frac{\partial^{s_0+|s|}v(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|$; $C^{r,\sigma}$, $0<\sigma<1$, — клас функцій $w(x)$ визначених і неперервних разом із похідними r-го порядку в області $\overline{Q}$, r-ті похідні яких задовольняють в $\overline{Q}$ умову Гельдера з показником σ; $A^{r,\sigma}$ — клас замкнених областей $\overline{Q}$, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{r,\sigma}$; $mes_{\mathbb{R}^n}B$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини $B\subset\mathbb{R}^n$; C_n^m, $1\le m\le n$, — кількість комбінацій із n елементів по m.

1 Постановка задачі

В області D розглянемо задачу

$$R(\partial/\partial t, L)u(t,x)\equiv(\partial/\partial t-a_n(t)L)\cdots(\partial/\partial t-a_1(t)L)u(t,x)=f(t,x), \quad (t,x)\in D, \tag{1}$$

$$V_{j,q_j}[u(t,x)]\equiv\left.\frac{\partial^{q_j-1}u(t,x)}{\partial t^{q_j-1}}\right|_{t=t_j}=\varphi_{j,q_j}(x), \tag{2}$$

$$q_j=1,\ldots,n_j, \quad j=1,\ldots,\ell, \quad 2\le\ell\le n, \quad 0\le t_1<t_2<\ldots<t_\ell\le T, \quad x\in\overline{Q},$$

$$L^m u(t,x)\Big|_{\Sigma}=0, \quad m=0,1,\ldots,(n-1), \tag{3}$$

де $a_r(t)\in C^{n-r}([0,T])$, $a_r(t)>0$, $t\in[0,T]$, $r=1,\ldots,n$; $n_1+\cdots+n_\ell=n$; $L=\sum\limits_{i,j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-q(x)$ — еліптичний в $\overline{Q}$ диференціальний вираз; $\varphi_{j,q_j}(x)\in L_2(Q)$, $q_j=1,\ldots,n_j$, $j=1,\ldots,\ell$, $f(t,x)\in C([0,T];L_2(Q))$. Дія операторів у (1) визначається справа наліво. Рівняння (1) є рівномірно параболічним за Петровським в області D.

Припустимо, що $Q\in A^{n,\sigma}$, $h_{ij}(x)\in C^{n-1,\sigma}$, $i,j\in\{1,\ldots,p\}$, $q(x)\in C^{n-2,\sigma}$, $0<\sigma<1$, $q(x)\ge 0$. Тоді задача

$$LX(x)=-\lambda X(x), \quad X(x)\big|_{\partial Q}=0$$

має повну ортогональну в $L_2(\overline{Q})$ систему власних функцій $\{X_k(x),\ k\in\mathbb{N}\}$ і нескінченну множину власних значень $\Lambda=\{\lambda_k,k\in\mathbb{N}\}$, при цьому $X_k(x)\in C^{2n}(\overline{Q}), k\in\mathbb{N}$, і справджуються оцінки [4, 6]

$$C_0k^{2/p}\le\lambda_k\le C_1k^{2/p}, \quad \lambda_k\in\Lambda, \quad 0<C_0<C_1, \tag{4}$$

$$\max_{x\in\overline{Q}}\left|\frac{\partial^{|s|}X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right|\le C_2\lambda_k^{p/4+|s|/2}, \qquad C_2>0, \quad |s|=0,1,\ldots,2n, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Далі позначимо: $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_\ell) \in [0,T]^\ell$, $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_\ell \le T$; $E_{\beta,\gamma}(Q)$, $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, — простір визначених в $\overline{Q}$ функцій $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi; E_{\beta,\gamma}(Q)\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \lambda_k^\beta \exp(\gamma\lambda_k);$$

$C^m([0,T]; E_{\beta,\gamma}(Q))$ — простір визначених в $\overline{D}$ функцій $v(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(t) X_k(x)$, таких, що для кожного $t \in [0,T]$ $\partial^j v(t,x)/\partial t^j \in E_{\beta,\gamma}(Q)$ і є неперервною за t в нормі цього простору, $j = 0, 1, \ldots, m$,

$$\|v; C^m([0,T]; E_{\delta,\gamma}(Q))\| = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} |v_k^{(j)}(t)| \lambda_k^\beta \exp(\gamma\lambda_k).$$

2 Єдиність розв'язку

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{6}$$

Кожна функція $u_k(t), k \in \mathbb{N}$, є, відповідно, розв'язком багатоточкової задачі

$$(d/dt + a_n(t)\lambda_k) \cdots (d/dt + a_1(t)\lambda_k) u_k(t) = f_k(t), \tag{7}$$

$$u_k^{(q_j-1)}(t_j) = \varphi_{j,q_j,k}, \quad q_j = 1, \ldots, n_j, \quad j = 1, \ldots, \ell, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_\ell \le T, \tag{8}$$

де $f_k(t) = \int\limits_Q f(t,x) X_k(x) dx$, $\quad \varphi_{j,q_j,k} = \int\limits_Q \varphi_{j,q_j}(x) X_k(x) dx$, $\quad q_j = 1, \ldots, n_j$, $\quad j = 1, \ldots, \ell$.

Розглянемо відповідну до (7), (8) однорідну задачу

$$(d/dt + a_n(t)\lambda_k) \cdots (d/dt + a_1(t)\lambda_k) u_k(t) = 0, \tag{9}$$

$$u_k^{(q_j-1)}(t_j) = 0, \quad q_j = 1, \ldots, n_j, \quad j = 1, \ldots, \ell, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_\ell \le T. \tag{10}$$

Позначимо: $I_j(t) = \int\limits_0^t a_j(\tau) d\tau$, $j = 1, \ldots, n$, $\quad \Theta_j(t) = I_j(t) - I_{j+1}(t)$, $j = 1, \ldots, n-1$; $R_j(\partial/\partial t, L) = (\partial/\partial t - a_j(t)L) \ldots (\partial/\partial t - a_1(t)L)$, $j = 1, \ldots, n$.

Відомо [8, с. 77], що функції

$$g_1(t,\lambda_k) = \exp\{-I_1(t)\lambda_k\}, \quad g_r(t,\lambda_k) = \exp\{-I_1(t)\lambda_k\} \int_0^t \exp\{\Theta_1(\xi_1)\lambda_k\}$$

$$\times \left(\int_0^{\xi_1} \exp\{\Theta_2(\xi_2)\lambda_k\} \cdots \left(\int_0^{\xi_{r-2}} \exp\{\Theta_{r-1}(\xi_{r-1})\lambda_k\} d\xi_{r-1} \right) \cdots d\xi_2 \right) d\xi_1, \quad r = 2, \ldots, n, \tag{11}$$

утворюють на відрізку $[0, T]$ фундаментальну систему розв'язків рівняння (9), при цьому виконуються рівності

$$R_{j-1}(\partial/\partial t, -\lambda_k) g_r(t, \lambda_k) = \delta_{jr} \exp(-I_r(t)\lambda_k),\ t \in [0, T],\ j = 2, \ldots, n, \quad r = 1, \ldots, j, \quad (12)$$

де δ_{jr} — символ Кронекера.

Характеристичний визначник задачі (9), (10) є таким:

$$\Delta(\lambda_k; \vec{t}) = \det \left\| g_r^{(q_j - 1)}(t_j, \lambda_k) \right\|_{q_j = 1, \ldots, n_j,\, j = 1, \ldots, \ell}^{r = 1, \ldots, n}. \quad (13)$$

Теорема 1. *Для довільного вектора $\vec{t} \in [0, T]^\ell$ задача (1)–(3) не може мати двох різних розв'язків із простору $C^{(n,2n)}(\overline{D})$.*

Доведення. Припустимо, що існують два різні розв'язки $u_1(t, x)$ та $u_2(t, x)$ задачі (1)–(3) з простору $C^{(n,2n)}(\overline{D})$. Тоді функція $\widetilde{u}(t, x) = u_1(t, x) - u_2(t, x)$, яка належить простору $C^{(n,2n)}(\overline{D})$, є розв'язком однорідної задачі, яка відповідає задачі (1)–(3) і зображується рядом Фур'є

$$\widetilde{u}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{u}_k(t) X_k(x). \quad (14)$$

При цьому функції $R\widetilde{u}(t, x)$ та $V_{j,q_j}[\widetilde{u}(t, x)]$, $q_j = 1, \ldots, n_j$, $\quad j = 1, \ldots, \ell$, також розвиваються в ряди Фур'є за системою функцій $\{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$, і ці ряди збігаються з рядами, одержаними формальним застосуванням операторів R та V_{j,q_j}, $q_j = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, \ell$, до ряду (14). Із рівностей Парсеваля для функцій $R\widetilde{u}(t, x)$ та $V_{j,q_j}[\widetilde{u}(t, x)]$, $q_j = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, \ell$, випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{u}_k(t)$ є розв'язком задачі (9), (10). Оскільки $R(d/dt, -\lambda_k)$ є композицією диференціальних виразів першого порядку з дійсними коефіцієнтами, то, згідно теореми В.Я. Скоробагатька [8, с. 31], $\widetilde{u}_k(t) \equiv 0$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Із рівностей Парсеваля для функції $\widetilde{u}(t, x)$ та неперервності $\widetilde{u}(t, x)$ в $\overline{D}$ випливає, що $\widetilde{u}(t, x) \equiv 0$, тобто $u_1(t, x) = u_2(t, x)$. Теорему доведено. □

3 Існування розв'язку

Для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ розв'язок задачі (7), (8) зображується формулою

$$u_k(t) = H(t, \lambda_k) + \sum_{r=1}^{n} C_r(\lambda_k) g_r(t, \lambda_k), \quad (15)$$

де

$$H(t, \lambda_k) = \exp\{-I_1(t)\lambda_k\} \int_0^t \exp\{\Theta_1(\xi_1)\lambda_k\} \Bigg(\int_0^{\xi_1} \exp\{\Theta_2(\xi_2)\lambda_k\} \times \ldots$$

$$\times \int_0^{\xi_{n-2}} \exp\{\Theta_{n-1}(\xi_{n-1})\lambda_k\} \Bigg(\int_0^{\xi_{n-1}} f_k(\xi_n) \exp\{I_n(\xi_n)\lambda_k\} d\xi_n \Bigg) d\xi_{n-1} \ldots d\xi_2 \Bigg) d\xi_1, \quad (16)$$

функції $g_r(t,\lambda_k)$ визначаються з допомогою формул (11), а коефіцієнти $C_r(\lambda_k)$, $r = 1,\dots,n$, — із системи рівнянь

$$\sum_{r=1}^{n} C_r(\lambda_k) g_r^{(q_j-1)}(t_j,\lambda_k) = \varphi_{j,q_j,k} - V_{j,q_j}[H(t,\lambda_k)], \quad q_j = 1,\dots,n_j, \quad j = 1,\dots,\ell, \tag{17}$$

визначник якої збігається з визначником $\Delta(\lambda_k;\vec{t})$. Розв'язуючи систему (17) за правилом Крамера, одержуємо

$$C_r(\lambda_k) = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j} \frac{\Delta_{j,q_j,r}(\lambda_k;\vec{t})}{\Delta(\lambda_k;\vec{t})}\big(\varphi_{j,q_j,k} - V_{j,q_j}[H(t,\lambda_k)]\big), \quad r = 1,\dots,n,$$

де $\Delta_{j,q_j,r}(\lambda_k;\vec{t})$, $q_j = 1,\dots,n_j$, $j = 1,\dots,\ell$, $r = 1,\dots,n$, — алгебричне доповнення елемента $g_r^{(q_j-1)}(t_j,\lambda_k)$ у визначнику (13). Підставляючи знайдені значення для $C_r(\lambda_k)$, $r = 1,\dots,n$, у формулу (15), на підставі (6) отримаємо формальне зображення розв'язку задачі (1)–(3) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(H(t,\lambda_k) + \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j} \frac{\Delta_{j,q_j,r}(\lambda_k;\vec{t})}{\Delta(\lambda_k;\vec{t})}\varphi_{j,q_j,k}\, g_r(t,\lambda_k)$$
$$- \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j} \frac{\Delta_{j,q_j,r}(\lambda_k;\vec{t})}{\Delta(\lambda_k;\vec{t})} V_{j,q_j}[H(t,\lambda_k)] g_r(t,\lambda_k)\Bigg) X_k(x). \tag{18}$$

Збіжність ряду (18), взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(\lambda_k;\vec{t})|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості $\lambda_k \in \Lambda$.

Введемо такі позначення: $\theta = \sum\limits_{j=1}^{\ell} C_{n_j}^2$, $N = \max\limits_{1\le j\le \ell}\{n_j\}$, $A_1 = \min\limits_{1\le j\le n}\left\{\min\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t a_j(\tau)d\tau\right\}$, $A_2 = \max\limits_{1\le j\le n-1}\left\{\max\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t (a_j(\tau) - a_{j+1}(\tau))d\tau\right\}$, $A_3 = \max\{0; A_2\}$, $A_4 = \max\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t a_n(\tau)d\tau$.

Теорема 2. *Нехай існують такі додатні сталі ρ та ν, що для всіх (крім скінченної кількості) значень $\lambda_k \in \Lambda$ виконується нерівність*

$$|\Delta(\lambda_k;\vec{t})| \ge \lambda_k^{-\rho}\exp(-\nu\lambda_k). \tag{19}$$

Якщо $f \in C([0,T]; E_{\beta_1,\gamma_1}(Q))$, $\beta_1 = \rho + \theta + 3n/2 + p/4 + N - 1$, $\gamma_1 = \nu - (n+1)A_1 + (n^2 + 3n - 2)A_3/2 + A_4$, $\varphi_{j,q_j} \in E_{\beta_2,\gamma_2}(Q)$, $\beta_2 = \rho + \theta + 3n/2 + p/4$, $\gamma_2 = \nu - nA_1 + n(n+1)A_3/2$, $q_j = 1,\dots,n_j$, $j = 1,\dots,\ell$, то існує розв'язок задачі (1)–(3) з простору $C^{(n,2n)}(\overline{D})$, який зображується рядом (18) і неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ та $\varphi_{j,q_j}(x)$, $q_j = 1,\dots,n_j$, $j = 1,\dots,\ell$.

Доведення. Із формул (11), (16) отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|g_r^{(s_0)}(t,\lambda_k)\right| \le C_3\lambda_k^{s_0}\exp\{((r-1)A_3 - A_1)\lambda_k\}, \quad r = 1,\dots,n, \tag{20}$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|H^{(s_0)}(t,\lambda_k)\right| \le C_4\lambda_k^{s_0}\exp\{(A_4-A_1+(n-1)A_3)\lambda_k\}\widetilde{f}_k, \tag{21}$$

де $s_0=0,1,\ldots,n$, $C_3=C_3(n,T)$, $C_4=C_4(n,T)$, $\widetilde{f}_k=\max\limits_{t\in[0,T]}|f_k(t)|$. На підставі (13), (20) отримуємо

$$\left|\Delta_{j,q_j,r}(\lambda_k;\vec{t})\right|\le (C_3)^{n-1}(n-1)!\lambda_k^{\theta}\exp\{[(n(n+1)/2-r+1)A_3-(n-1)A_1]\lambda_k\}, \tag{22}$$

$$q_j=1,\ldots,n_j,\quad j=1,\ldots,\ell,\quad r=1,\ldots,n.$$

Із формули (18) на підставі нерівностей (5), (19)–(22) дістаємо оцінку

$$\|u;C^{(n,2n)}(\overline{D})\|\le C_5\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{f}_k\lambda_k^{\rho+\theta+3n/2+p/4+N-1}\exp\{(\nu-(n+1)A_1+(n^2+3n-2)A_3/2+A_4)\lambda_k\}$$

$$+C_6\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j}|\varphi_{j,q_j,k}|\lambda_k^{\rho+\theta+3n/2+p/4}\exp\{(\nu-nA_1+n(n+1)A_3/2)\lambda_k\}$$

$$\le C_7\left(\|f;C([0,T];E_{\beta_1,\gamma_1}(Q))\|+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{q_j=1}^{n_j}\|\varphi_{j,q_j};E_{\beta_2,\gamma_2}(Q))\|\right), \tag{23}$$

де $C_5=(n+1)!C_2(C_3)^nC_4M_{2n}$, $C_6=n!C_2(C_3)^nM_{2n}$, C_2 — стала з оцінок (5), M_{2n} — кількість усіх розв'язків нерівності $s_0+|s|\le 2n$, у цілих невід'ємних числах $s_0,s_1,\ldots,s_p$, $s_0\le n$, $C_7=\max\{C_5,C_6\}$. Із (23) випливає доведення теореми. □

4 Оцінки знизу малих знаменників

Розглянемо питання про можливість виконання оцінки (19) для деяких частинних випадків задачі (1)–(3).

4.1. Нехай у рівнянні (1)

$$a_r(t)=a(t)+\alpha_r,\quad r=1,\ldots,n,\quad 0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n, \tag{24}$$

де $a(t)\in C^{n-1}([0,T])$, $a(t)>0$, $t\in[0,T]$. Характеристичний визначник задачі (9), (10), (24) зображується формулою

$$\Delta(\lambda_k;\vec{t})=\widetilde{\Delta}(\lambda_k;\vec{t})(-\lambda_k)^{-n(n-1)/2+\theta}\exp\left\{-\lambda_k\sum_{j=1}^{\ell}n_jI(t_j)\right\}\prod_{1\le r<q\le n}(\alpha_q-\alpha_r)^{-1}, \tag{25}$$

де $\widetilde{\Delta}(\lambda_k;\vec{t})=\det\left\|\alpha_r^{q_j-1}\exp(-\alpha_rt_j\lambda_k)\right\|_{q_j=1,\ldots,n_j,\,j=1,\ldots,\ell}^{r=1,\ldots,n}$, $I(t)=\int\limits_0^t a(\tau)d\tau$.

Позначимо: $C(n,m)$, $1\le m\le n$, — множина всіх наборів $\omega=(i_1,\ldots,i_m)$, складених з натуральних чисел $i_1,\ldots,i_m$, таких, що $1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le n$, кількість усіх таких наборів $\omega\in C(n,m)$ дорівнює C_n^m; $s_\omega=i_1+\ldots+i_m$, $set\omega=\{i_1,\ldots,i_m\}$, $\Lambda_\omega=\alpha_{i_1}+\ldots+\alpha_{i_m}$, $\Gamma_\omega=\prod\limits_{1\le q<j\le m}(\alpha_{i_j}-\alpha_{i_q})$;

$$r_j=n_j+\ldots+n_\ell,\quad j=1,\ldots,\ell,\quad r_{\ell+1}=0,$$

$$\omega_j = (r_{j+1}+1, r_{j+1}+2, \dots, r_{j+1}+n_j), \quad j = 1, \dots, \ell, \tag{26}$$

$$P_j(\mu, \lambda_k) = \prod_{\omega \in C(r_j, n_j), \omega \neq \omega_j} (\mu + \Lambda_\omega \lambda_k), \quad j = 1, \dots, \ell - 1. \tag{27}$$

Зауважимо, що степінь многочлена $P_j(\mu; \lambda_k)$ за змінною μ дорівнює $\sigma_j = C_{r_j}^{n_j} - 1$, $j = 1, \dots, \ell - 1$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\ell$) векторів $\vec{t} \in [0, T]^\ell$ і для довільних фіксованих α_r, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, нерівність (19) виконується для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$ при $\rho > n(n-1)/2 - \theta + (p/2-1) \sum\limits_{j=1}^{\ell-1} \sigma_j$, $\nu = n(M_1 + \alpha_n)T$, де $M_1 = \max\limits_{t \in [0,T]} a(t)$.*

Доведення. Доведемо спочатку, що для довільних фіксованих α_r, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, при $\rho_1 > (p/2 - 1) \sum\limits_{j=1}^{\ell-1} \sigma_j$, $\nu_1 = n\alpha_n T$ нерівність

$$|\widetilde{\Delta}(\lambda_k; \vec{t})| \geq \lambda_k^{-\rho_1} \exp(-\nu_1 \lambda_k) \prod_{1 \leq r < q \leq n} (\alpha_q - \alpha_r) \tag{28}$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^\ell$) векторів $\vec{t} \in [0, T]^\ell$ для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$. Враховуючи лему Бореля-Кантеллі [15, с. 13], для цього досить довести, що збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} mes_{\mathbb{R}^\ell} N_{\rho_1, \nu_1}(\lambda_k), \tag{29}$$

де $N_{\rho_1, \nu_1}(\lambda_k) = \{\vec{t} \in [0, T]^\ell : |\widetilde{\Delta}(\lambda_k; \vec{t})| < \lambda_k^{-\rho_1} \exp(-\nu_1 \lambda_k) \prod\limits_{1 \leq r < q \leq n} (\alpha_q - \alpha_r)\}$, $\lambda_k \in \Lambda$.

Через $\widetilde{\Delta}_\omega^j(\lambda_k; t_{j+1}, \dots, t_\ell)$, $j = 1, \dots, \ell - 1$, $\omega \in C(r_j, n_j)$, позначимо визначник, який отримується з визначника $\widetilde{\Delta}(\lambda_k; \vec{t})$ викреслюванням перших $(n - r_{j+1})$ рядків та останніх $n - r_j$ стовпців і n_j стовпців, номери яких складають множину $set\omega$. Для набору ω_j, $j = 1, \dots, \ell - 1$, (див. формулу (26)) покладемо $\widetilde{\Delta}_{\omega_j}^j(\lambda_k; t_{j+1}, \dots, t_\ell) = \widetilde{\Delta}^j(\lambda_k; t_{j+1}, \dots, t_\ell)$. Розглянемо множини

$$G_0(\lambda_k) = \{\vec{t} \in [0, T]^\ell : |\widetilde{\Delta}(\lambda_k)| < z_0(\lambda_k)\}, \quad \lambda_k \in \Lambda,$$

$$G_j(\lambda_k) = \{\vec{t} \in [0, T]^\ell : |\widetilde{\Delta}^{j-1}(\lambda_k; t_j, \dots, t_\ell)| < z_{j-1}(\lambda_k),\ |\widetilde{\Delta}^j(\lambda_k; t_{j+1}, \dots, t_\ell)| \geq z_j(\lambda_k)\},$$

$$j = 1, \dots, \ell - 1, \quad \lambda_k \in \Lambda,$$

де $\widetilde{\Delta}^0(\lambda_k; t_1, \dots, t_\ell) = \widetilde{\Delta}(\lambda_k, \vec{t})$, а $z_j(\lambda_k)$, $\quad j = 0, 1, \dots, \ell - 1$, визначаються рівностями

$$z_j(\lambda_k) = \lambda_k^{-\psi_j} \exp(-\eta_j \alpha_n T \lambda_k) \prod_{q=j+1}^{\ell} \Gamma_{\omega_q}, \quad j = 1, \dots, \ell - 1,$$

у яких $\eta_j = \sum\limits_{q=j+1}^{\ell} n_q$, $j = 0, 1, \ldots, \ell - 1$, $\psi_{\ell-1} = 0$, $\psi_j = (p/2 - 1) \sum\limits_{q=j+1}^{\ell-1} \sigma_q + \varepsilon_j$, $j = 0, 1, \ldots, \ell-2$, $0 < \varepsilon_{\ell-2} < \ldots < \varepsilon_0 = \rho_1 - (p/2-1) \sum\limits_{j=1}^{\ell-1} \sigma_j$. Очевидно, що $N_{\rho_1,\nu_1}(\lambda_k) \subset G_0(\lambda_k)$, тому ряд (29) збігається тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} mes_{\mathbb{R}^\ell} G_0(\lambda_k). \tag{30}$$

Встановимо збіжність ряду (30). Для цього зауважимо, що оскільки

$$\widetilde{\Delta}^{\ell-1}(\lambda_k; t_\ell) = \det \|\alpha_j^{q-1} \exp(-\alpha_j t_\ell \lambda_k)\|_{q,j=1}^{n_\ell} = \Gamma_{\omega_\ell} \exp(-\Lambda_{\omega_\ell} t_\ell \lambda_k),$$

то $|\widetilde{\Delta}^{\ell-1}(\lambda_k; t_\ell)| \geq \Gamma_{\omega_\ell} \exp(-n_\ell \alpha_n T \lambda_k) = z_{\ell-1}(\lambda_k)$. Тому $G_0(\lambda_k) \subset \bigcup_{j=1}^{\ell-1} G_j(\lambda_k)$, і виконується оцінка

$$mes_{\mathbb{R}^\ell} G_0(\lambda_k) \leq \sum_{j=1}^{\ell-1} mes_{\mathbb{R}^\ell} G_j(\lambda_k). \tag{31}$$

Згідно з теоремою Фубіні [2, с. 119],

$$mes_{\mathbb{R}^\ell} G_j(\lambda_k) = \int\limits_{[0,T]^{\ell-1}} mes_{\mathbb{R}} G_j(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_\ell) dt_1 \ldots dt_{j-1} dt_{j+1} \ldots dt_\ell, \tag{32}$$

де $G_j(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_\ell) = \{t_j \in [0, T] : \vec{t} \in G_j(\lambda_k)\}$, $j = 0, 1, \ldots, \ell - 1$.

Для оцінки зверху міри Лебега множин $G_j(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_\ell)$, $j = 1, \ldots, \ell-1$, використаємо лему 3 з [10]. Для цього зауважимо, що функція $\widetilde{\Delta}^{j-1}(\lambda_k; t_j, \ldots, t_\ell)$ як функція змінної t_j (при фіксованих $t_{j+1}, \ldots, t_\ell$) є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $\alpha_n T \lambda_k$. Із теореми Лапласа про обчислення визначника випливають такі рівності:

$$\widetilde{\Delta}^{j-1}(\lambda_k; t_j, \ldots, t_\ell) = \sum_{\omega=(i_1,\ldots,i_m) \in C(r_j,n_j)} (-1)^{\varsigma_j + s_\omega} \Gamma_\omega \exp(-\Lambda_\omega t_j \lambda_k) \widetilde{\Delta}^j_\omega(\lambda_k; t_{j+1}, \ldots, t_\ell), \tag{33}$$

де $j = 1, \ldots, \ell - 1$, $\varsigma_j = n_j(n_j + 1)/2$. Із формул (27), (33) отримуємо, що

$$P_j\big(\partial/\partial t_j; \lambda_k\big) \widetilde{\Delta}^{j-1}(\lambda_k; t_j, \ldots, t_\ell) = (-1)^{\varsigma_j + s_{\omega_j}} \Gamma_{\omega_j} \exp(-\Lambda_{\omega_j} t_j \lambda_k) P_j(-\Lambda_{\omega_j} \lambda_k; \lambda_k)$$
$$\times \widetilde{\Delta}^j(\lambda_k; t_{j+1}, \ldots, t_\ell), \quad j = 1, \ldots, \ell - 1. \tag{34}$$

$$|P_j(-\Lambda_{\omega_j} \lambda_k; \lambda_k)| \geq C_8 \lambda_k^{\sigma_j}, \quad j = 1, \ldots, \ell - 1, \tag{35}$$

де $C_8 = C_8(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Якщо $\vec{t} \in G_j(\lambda_k)$, $j = 1, \ldots, \ell - 1$, то з формул (34), (35) та означення множин $G_j(\lambda_k)$ випливає, що

$$\forall t_j \in [0, T] \quad |P_j\big(\partial/\partial t_j; \lambda_k\big) \widetilde{\Delta}^{j-1}(\lambda_k; t_j, \ldots, t_\ell)| \geq C_8 z_j(\lambda_k) \lambda_k^{\sigma_j} \exp(-n_j \alpha_n T \lambda_k) \Gamma_{\omega_j}, \tag{36}$$

$$j = 1, \ldots, \ell - 1.$$

Із нерівностей (36) на підставі леми 3 з [10] отримуємо, що

$$mes_{\mathbb{R}} G_j(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_\ell) \leq C_{10} \left(\frac{z_{j-1}(\lambda_k)}{C_9 z_j(\lambda_k) \lambda_k^{\sigma_j} \exp(-n_j \alpha_n T \lambda_k) \Gamma_{\omega_j}} \right)^{\sigma_j}$$

$$\leq C_{11} \lambda_k^{-p/2-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \min_{1 \leq j \leq \ell-1} \{(\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j)/\sigma_j\}, \quad j = 1, \ldots, \ell-1, \tag{37}$$

де $C_{10} = C_{10}(n, T)$, $C_{11} = C_{10} \max\limits_{1 \leq j \leq \ell-1} \{(C_9)^{-\sigma_j}\}$. На підставі (4), (31), (32) та (37) отримуємо

$$mes_{\mathbb{R}^\ell} G_0(\lambda_k) \leq \sum_{j=1}^{\ell-1} mes_{\mathbb{R}^\ell} G_j(\lambda_k) \leq C_{12} k^{-1-2\varepsilon/p}, \tag{38}$$

де $C_{12} = (l-1)(C_0)^{-p/2-\varepsilon} C_{11} T^{l-1}$, C_0 — стала з оцінок (4). Із (38) випливає збіжність (30). Враховуючи те, що $\exp\left\{-\lambda_k \sum\limits_{j=1}^{\ell} n_j I(t_j)\right\} \geq \exp(-nM_1 T \lambda_k)$, із (25) та (28) отримуємо твердження теореми. □

4.2. Нехай в умовах (2) $\ell = 2$, $n_1 = n-1$, $n_2 = 1$. У цьому випадку справедливим буде твердження.

Теорема 4. *Для довільного фіксованого $t_1 \in [0, T)$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_2 \in [t_1, T]$ нерівність (20) виконується для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$ при $\rho > (n-1)p/2$, $\nu = (2n-1)M_2 T - (n-1)M_2 t_1$, де $M_2 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \bigl\{ \max\limits_{t \in [0,T]} a_j(t) \bigr\}$.*

Доведення. З огляду на лему Бореля-Кантеллі [15, с. 13] нам досить показати, що для довільного фіксованого $t_1 \in [0, T)$ при $\rho > (n-1)p/2$, $\nu = (2n-1)M_2 T - (n-1)M_2 t_1$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} mes_{\mathbb{R}} N_{\rho,\nu}(\lambda_k, t_1), \tag{39}$$

де $N_{\rho,\nu}(\lambda_k, t_1) = \{t_2 \in [t_1; T] : |\Delta(\lambda_k, \vec{t})| < \lambda_k^{-\rho} \exp(-\nu \lambda_k)\}$, $\lambda_k \in \Lambda$, є збіжним. Розвиваючи визначник $\Delta(\lambda_k; \vec{t})$ за елементами останнього рядка, враховуючи (12) отримуємо

$$R_{n-1}(\partial/\partial t_2; -\lambda_k) \Delta(\lambda_k; \vec{t}) = \exp(-I_n(t_2)\lambda_k) \Delta_{n,n}(\lambda_k, t_1), \tag{40}$$

де $\Delta_{n,n}(\lambda_k, t_1) = \det \|g_r^{(j-1)}(\lambda_k, t_1)\|_{r,j=1}^{n-1}$. Оскільки на підставі (11)

$$\Delta_{n,n}(\lambda_k, t_1) = \exp(-(I_1(t_1) + \cdots + I_{n-1}(t_1))\lambda_k) \quad t_1 \in [0, T),$$

то з формули (40) отримуємо

$$\forall t_2 \in [t_1, T] \quad |R_{n-1}(\partial/\partial t_2; -\lambda_k) \Delta(\lambda_k; \vec{t})| = \exp(-(I_1(t_1) + \cdots + I_{n-1}(t_1) + I_n(t_2))\lambda_k)$$

$$\geq \exp(-nM_2 T \lambda_k). \tag{41}$$

Із (41) на підставі леми 5 з [14] отримуємо, що

$$mes_{\mathbb{R}} N_{\rho,\nu}(\lambda_k, t_1) \leq \exp(M_2(T - t_1)\lambda_k) \left(\frac{\lambda_k^{-\rho} \exp(-\nu \lambda_k)}{\exp(-nM_2 T \lambda_k)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \lambda_k^{-p/2-\zeta}, \tag{42}$$

де $\zeta = (\rho - (n-1)p/2)/(n-1)$. На підставі (4), (42) дістаємо оцінку

$$mes_{\mathbb{R}} N_{\rho,\nu}(\lambda_k, t_1) \le C_{14} k^{-1-2\zeta/p}, \tag{43}$$

де $C_{14} = (C_0)^{-p/2-\zeta}$, C_0 — стала з оцінок (4). Із (43) випливає збіжність ряду (39). $\square$

4.3. Нехай в умовах (2) усі вузли інтерполяції прості, тоді

$$\Delta(\lambda_k; \vec{t}) = \det\big\|g_r(t_j, \lambda_k)\big\|_{j,r=1}^{n}.$$

Теорема 5. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$ нерівність*

$$\left|\det\big\|g_r(t_j, \lambda_k)\big\|_{j,r=1}^{n}\right| \ge \lambda_k^{-\rho} \exp\{-\nu\lambda_k\}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$ при $\rho > n(n-1)p/2$, $\nu = n(n+1)M_2T/2$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 7 із [14].

Література

1. Валицкий Ю.Н. *Корректность задачи для дифференциального уравнения при заданых значениях функции и ее производных в нескольких точках* // Сиб. мат. журн. — 1996. — Т.37, №2. — С. 251–258.
2. Дороговцев А.Я. Элементи общей теории меры и интеграла. — К.: Выща школа, 1989. — 152 с.
3. Дрінь Я.М. *Нелокальна багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь параболічного типу* // Наук. вісник Чернів. ун-ту. Математика. — 2010. — Вип. 501. — С. 24–32.
4. Ильин В.А., Шишмарев И.А. *Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их проиводных* // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1960. — Т.24, №6. — С. 883–896.
5. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. — К.: Ін-т математики НАН України, 1999. — 176 с.
6. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976. — 391 с.
7. Нитребич З.М. *Про граничні переходи у задачах з локальними багатоточковими за часом умовами для рівнянь із частинними похідними* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2006. — Вип. 66. — С. 137–150.
8. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — К.: Наук. думка, 1984. — 264 с.
9. Пташник Б.Й., Галун К.С. *Багатоточкова задача для факторизованих гіперболіко-параболічних операторів* // Доп. НАН України. — 2009. — №11. — С. 33–38.
10. Пташник Б.Й., Симотюк М.М. *Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі збуренням* // Нелинейные граничные задачи. — 2006. — №16. — С. 202–212.
11. Пташник Б.Й., Симотюк М.М. *Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними* // Укр. мат. журн. — 2003. — Т.55, №3. — С. 400–413.
12. Пташник Б.Й., Тимків І.Р. *Багатоточкова задача для параболічних рівнянь високого порядку в паралелепіпеді* // Нелінійні коливання. — 2009. — Т.12, №3. — С. 336–346.

13. Силюга Л.П. *Багатоточкова задача для параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — Т.43, №4. — С. 42–48.

14. Симотюк М.М. *Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т.46, №2. — С. 26–41.

15. Спринджук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. — М.: Наука, 1977. — 143 с.

16. Ashyralyev A., Dural A., Sözen Y., *Well-posendness of Rothe difference scheme for reverse parabolic equations*, Iranian J. of Optimization, **1**, 2 (2009), 107–131.

17. Umarov S., Gorenfo R., *Cauchy and Nonlocal Multi-Point Problems for Distributed Order Pseudo-Differential Equations, Part One*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, **24**, 3 (2005), 449–466.

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна

Надійшло 10.03.2011

Tymkiv I.R. *Multipoint problem with for factorized parabolic operator with variable coefficients*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 2 (2011), 120–130.

The correctness of the problem with multipoints conditions with respect time-variable and conditions of the Dirichlet by Petrovski linear parabolic equation with variable coefficients in a limited cylindrical domen. The conditions of existence and uniqueness of the classical solution of the problem are established. The metrical theorems on evalution from below of small denominators of the problem are proved.

Тымкив И.Р. *Многоточечная задача с кратными узлами для факторизованого параболического оператора с переменными коэффициентами* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №2. — С. 120–130.

Исследовано корректность задачи с многоточечными условиями по временной переменной и условиями типа Дирихле по пространственным координатам для линейного параболического за Петровским уравнения с переменными коэффициентами в ограниченной цилиндрической области. Установлены условия существования и единственности классического решения задачи. Доказано метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, которые возникли при построении решения.