Карпатські математичні
публікації. Т.1, №1

Carpathian Mathematical
Publications. V.1, No.1

УДК 517.98

Можировська З.Г.

НОРМАЛЬНІ ТА САМОСПРЯЖЕНІ ОПЕРАТОРИ КОМПОЗИЦІЇ НА ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Можировська З.Г. *Нормальні та самоспряжені оператори композиції на просторах аналітичних функцій // Карпатські математичні публікації.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 69–78.

В статті розглядаються спектральні властивості нормальних операторів композиції, а також досліджуються деякі властивості самоспряжених операторів композиції на просторах аналітичних функцій гільбертового простору.

Вступ

Серед лінійних операторів, що діють на просторах аналітичних функцій вирізняються оператори композиції з аналітичними відображеннями, які не виводять за межі даного класу функцій. Точніше, нехай U_1, U_2 — відкриті множини у комплексних банахових просторах X_1 та X_2 і $\mathcal{A}_1$ та $\mathcal{A}_2$ — деякі лінійні простори аналітичних функцій на U_1 та U_2 відповідно. Якщо $F : X_1 \to X_2$ — аналітичне відображення таке, що $f(F(x)) \in \mathcal{A}_1$ для кожної функції $f \in \mathcal{A}_2$, то відображення $T_F : f \mapsto f \circ F$ є лінійним оператором з $\mathcal{A}_2$ в $\mathcal{A}_1$.

В 1960-х роках Й. Риф [15], Е. Нордгрен [13] та Г. Шварц [16] описали зв'язок між властивостями операторів композиції та теорією функцій. Їхні досягнення поклали початок активній діяльності з вивчення операторів композиції, яка включає дослідження спектру ([7, 8, 11, 10]) і компактності ([12, 17]).

Спектральні властивості лінійних операторів добре описані у відомих працях У. Рудіна [5], Н. Данфорда й Дж. Т. Шварца [3], а також Н.І. Ахієзера, І.М. Глазмана [1]. В даній статті досліджено ці ж властивості для операторів композиції на просторах аналітичних функцій нескінченної кількості змінних. Також в статті розглядаються властивості самоспряжених операторів композиції. Відомо, що не завжди, спряжений оператор до оператора композиції T_F буде оператором композиції. В даній роботі ми розглянемо умови, при яких T_F є самоспряженим оператором композиції.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46J15, 46J20, 46E15.

1 Попередні відомості

Спектральна теорема в нескінченновимірному гільбертовому просторі відповідає класичній теоремі лінійної алгебри про зведення ермітової матриці до діагонального вигляду в n-вимірному просторі.

Нехай T — лінійний обмежений оператор в гільбертовому просторі E, T^* — спряжений оператор , (x, y) — скалярний добуток в E, $x, y \in E$. За означенням $(Tx, y) = (x, T^*y)$.

Означення 1.1. *Оператор T називається нормальним, якщо $TT^* = T^*T$.*

Наведемо деякі відомі результати зі спектральної теорії нормальних операторів (див. [3]). Будемо позначати $\rho(T)$ — резольвентна множина, $\sigma(T)$ — спектр оператора T, λ — власне значення оператора T.

Спектральні множини визначаються як підмножини спектру $\sigma(T)$, які одночасно відкриті та замкнені в топології простору.

Кожній спектральній множині σ відповідає проектор

$$\mathcal{E}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\sigma)} (\lambda I - T)^{-1} d\lambda, \tag{1}$$

де $C(\sigma)$ — довільна орієнтована жорданова крива в резольвентній множині $\rho(T)$, яка охоплює σ. Ці проектори задовольняють такі відношення:

$$\mathcal{E}(\sigma \cap \delta) = \mathcal{E}(\sigma) \cap \mathcal{E}(\delta),$$

$$\mathcal{E}(\sigma \cup \delta) = \mathcal{E}(\sigma) \vee \mathcal{E}(\delta) = \mathcal{E}(\sigma) + \mathcal{E}(\delta) - \mathcal{E}(\sigma \cap \delta),$$
$$\mathcal{E}(\sigma(T)) = I, \qquad \mathcal{E}(\varnothing) = 0, \tag{2}$$

де σ і δ — довільні спектральні множини, I — одиничний оператор, $\varnothing$ — порожня множина.

Відношення (2) показують, що відповідність $\sigma \to \mathcal{E}(\sigma)$ є гомоморфним відображенням булевої алгебри спектральних множин на булеву алгебру проекторів $\mathcal{X}$. Крім того, цей гомоморфізм переводить одиницю $\sigma(T)$ алгебри спектральних множин в одиницю I алгебри проекторів.

Спектральною мірою в банаховому просторі $\mathcal{X}$ називається гомоморфне відображення булевої алгебри множин в булеву алгебру проекторів в $\mathcal{X}$, яке переводить одиницю вихідної алгебри в одиничний оператор I.

Отже, за співвідношенням (1) з кожним обмеженим оператором T в комплексному банаховому просторі пов'язана спектральна міра $\mathcal{E}$, яка визначена на сім'ї спектральних множин оператора T. Ця спектральна міра пов'язана з T також співвідношеннями:

$$\mathcal{E}(\delta)T = T\mathcal{E}(\delta), \qquad \sigma(T_\delta) = \delta, \tag{3}$$

де δ — довільна спектральна множина оператора T, а $\sigma(T_\delta)$ — спектр звуження T_δ оператора T на підпростір $\mathcal{X}_\delta = \mathcal{E}(\delta)\mathcal{X}$.

Нормальний оператор T в гільбертовому просторі E породжує спектральну міру, яка визначена на булевій алгебрі $\mathcal{B}$ всіх борелівських множин комплексної площини і задовольняє умові (3) для всіх $\delta \in \mathcal{B}$. Ця спектральна міра, яка пов'язана з нормальним оператором є зліченно адитивною на $\mathcal{B}$ в сильній операторній топології. Це означає, що

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}(\delta_i)x = \mathcal{E}\left(\cup_{i=1}^{\infty} \delta_i\right) x, \tag{4}$$

$x \in X$, $\{\delta_i\}$ — довільна послідовність множин, які не перетинаються.

Спектральна міра $\mathcal{E}$, яка визначена на борелівських множинах комплексної площини і яка задовольняє умові (3) для кожної борелівської множини δ і умові (4) для будь-якої послідовності неперетинних борелівських множин $\{\delta_i\}$, називається *розкладом одиниці* для оператора T.

Спектральна теорема для обмежених нормальних операторів в гільбертовому просторі стверджує, що кожний такий оператор має однозначно визначений розклад одиниці (див. [3]).

Теорема 1. *Обмежений нормальний оператор T однозначно визначає на борелівських множинах комплексної площини регулярну зліченно адитивну самоспряжену спектральну міру $\mathcal{E}$, яка перетворюється в нуль на $\rho(T)$ і володіє тією властивістю, що*

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\mathcal{E}(d\lambda), \qquad f \in C(\sigma(T)).$$

Однозначно визначена спектральна міра в цій теоремі є розкладом одиниці для T.

Теорема 2. *Регулярна зліченно адитивна самоспряжена спектральна міра $\mathcal{E}$, яка визначена на борелівських множинах комплексної площини, тоді і тільки тоді є розкладом одиниці для нормального оператора T, коли $T = \int_{\sigma(T)} \lambda\mathcal{E}(d\lambda)$.*

Побудуємо простір на якому розглянемо спектральні властивості операторів композиції.

Простори $\mathcal{H}_\eta$ будуються як спряжені до абстрактних симетричних просторів Фока $\mathcal{F}_\eta$ над простором E. Тобто $\mathcal{F}_\eta$ є зважені ℓ_2-суми симетричних гільбертових тензорних добутків простору E. Таким чином, кожна функція $f \in \mathcal{H}_\eta$ має вигляд $f(x) = \langle \eta(x) \mid \overline{f} \rangle$, де $\overline{f}$ — деякий елемент з $\mathcal{F}_\eta$, $x \in E$, а $\eta : U \to \mathcal{F}_\eta$ — вкладення з $U \in E$ в $\mathcal{F}_\eta$. Відображення η має вигляд

$$\eta(x) = \sum_{k_1+\dots+k_n=0}^{\infty} \sum_{i_1<\dots<i_n} c_{i_1\dots i_n}^{k_1\dots k_n} x_{i_1}^{k_1} \dots x_{i_n}^{k_n} e_{i_1}^{k_1} \dots e_{i_n}^{k_n} =$$

$$= \sum_{|(k)|=0}^{\infty} \sum_{[i]} c_{[i]}^{(k)} x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}. \tag{5}$$

Якщо $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ — ортонормована база в E, то $e_{[i]}^{(k)} := e_{i_1}^{k_1} \otimes_s \dots \otimes_s e_{i_n}^{k_n}$, $k_j \geq 0$, $k_1 + \dots + k_n = n$, $i_1 < \ldots < i_n$, ортогональна база в $\mathcal{F}_\eta$ і $\left\| e_{[i]}^{(k)} \right\| = \left(c_{[i]}^{(k)} \right)^{-2}$.

Теорема 3. *Припустимо, що існує константа $S > 0$ і послідовність додатних чисел (M_n) така, що*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = M \le \infty$$

і для кожного n

$$0 < c_{[i]}^{(k)} = c_{i_1\dots i_n}^{k_1\dots k_n} \le SM_n^2 \frac{(k_1+\dots+k_n)!}{k_1!\cdots k_n!} = SM_n^2 \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!},$$

де $n = k_1+\dots+k_n$. Тоді існує відкрита підмножина $U \subset E$, $U \ni 0$, така, що

i) *Ряд (5) збігається для кожного $x \in U$ і η є аналітичним відображенням з U в $\mathcal{F}_\eta$.*

ii) *Для кожного $\varphi \in \mathcal{F}_\eta$ відображення $f_\varphi(x) = \langle \eta(x) \mid \varphi\rangle$ є аналітичною функцією на U.*

iii) *Функція $\left\langle \eta(x) \middle| e_{[i]}^{(k)} \right\rangle$ є n-однорідним поліномом і*

$$\left\langle \eta(x) \middle| e_{[i]}^{(k)} \right\rangle = x_{i_1}^{k_1}\cdots x_{i_n}^{k_n}.$$

iv) *Множина $\{\eta(x) : x \in U\}$ є щільною в $\mathcal{F}_\eta$.*

Теорема 4. *Припустимо, що константа $S > 0$ і послідовність додатних чисел (M_n) є такими, що*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = 0$$

і

$$c_{[i]}^{(k)} \le SM_n^2 \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!},$$

де $c_{[i]}^{(k)} = \left\| e_{[i]}^{(k)} \right\|^{-2}$, $e_{[i]}^{(k)}$ — ортогональна база в $\mathcal{F}_\eta$. Тоді $\mathcal{H}_\eta = \mathcal{F}_\eta^*$ є гільбертовим простором, який складається з цілих функцій обмеженого типу на E.

Цей простір розглядався в роботі Ю.М. Березанського та Ю.Г. Кондратьєва [2], а також досліджувався в роботах А.В. Загороднюка та О.В. Лопушанського [4].

2 Спектральний розклад для нормальних операторів композиції

Нехай E — комплексний гільбертів простір. Розглянемо спектральні властивості нормального оператора композиції $T_F : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\eta$, $T_F(f)(x) = f(F(x))$.

Теорема 5. *Якщо $F : E \to E$ — лінійний нормальний оператор, то оператор T_F є нормальним.*

Доведення. Нехай F — лінійний нормальний оператор. Доведемо, що оператор композиції T_F є нормальним оператором. Візьмемо функцію $f(x) \in D(T_F)$, тоді для деякого елемента

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{u_{n_k}\otimes\cdots\otimes u_{n_k}}_{n}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(x|u_{n_k})^n, \qquad f(F(x))=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(F(x)|u_{n_k})^n.$$

Отже,

$$T_F^*T_F(f(x))=T_F^*(f(F(x)))=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(F(F^*(x))|u_{n_k})^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(F^*(F(x))|u_{n_k})^n=T_FT_F^*(f(x)).$$

Тобто оператори F і F^* комутують на спільній області визначення. Таким чином, оператор T_F є нормальним. Теорему доведено. □

Теорема 6. *Нехай F — нормальний (не обов'язково обмежений) лінійний оператор в E з областю визначення $D(F)$, $\mathcal{B}(\mathbb{C})\ni\lambda\to\mathcal{E}(\lambda)\in\mathcal{L}(\mathrm{E})$ — розклад одиниці цього оператора в E. Тоді T_F, як оператор в просторі $\mathcal{H}_\eta$, допускає зображення*

$$T_F=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\sigma(F)}\cdots\int\limits_{\sigma(F)}\lambda_1\cdots\lambda_n\mathcal{E}(d\lambda_1)\otimes_s\cdots\otimes_s\mathcal{E}(d\lambda_n),$$

де $\sigma(F)$ позначає спектр оператора F.

Доведення. Нехай $x=\int\limits_{\sigma(F)}\mathcal{E}(d\lambda)x$, $\mathcal{E}(\lambda)$ — розклад одиниці в E, який відповідає лінійному оператору F, $x\in D(F)$. Тоді для $x_1,\dots x_n\in D(F)$

$$x_1\otimes_s\cdots\otimes_s x_n=\int\limits_{\sigma(F)}\mathcal{E}(d\lambda)x_1\otimes_s\cdots\otimes_s\int\limits_{\sigma(F)}\mathcal{E}(d\lambda)x_n.$$

Нехай

$$w_n=\sum_k\underbrace{\int\limits_{\sigma(F)}\mathcal{E}(d\lambda)y_k\otimes\cdots\otimes\int\limits_{\sigma(F)}\mathcal{E}(d\lambda)y_k}_{n}\quad -$$

елемент з $\otimes_s^n E$, який належить області визначення $\otimes_s^n D(F)$.

Візьмемо

$$f_n(x)=\langle\underbrace{x\otimes\cdots\otimes x}_{n}\mid w_n\rangle=\langle x^{(n)}\mid w_n\rangle.$$

Тоді $f_n \in D(T_F)$.

$$f_n(F(x)) = \langle \underbrace{F(x) \otimes \dots \otimes F(x)}_{n} \mid \sum_k \int\limits_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda) y_k \otimes \dots \otimes \int\limits_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda) y_k \rangle =$$

$$= \sum_k \Big\langle F(x) \mid \int\limits_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda) y_k \Big\rangle^n = \sum_k \Big\langle \int\limits_{\sigma(F)} \lambda \mathcal{E}(d\lambda) x \mid \int\limits_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda) y_k \Big\rangle^n =$$

$$= \sum_k \Big(\int\limits_{\sigma(F)} \lambda \langle \mathcal{E}(d\lambda) x \mid \int\limits_{\sigma(F)} \mathcal{E}(d\lambda) y_k \rangle \Big)^n =$$

$$= \sum_k \Big(\int\limits_{\sigma(F)} \lambda_1 \langle \mathcal{E}(d\lambda_1) x \mid \mathcal{E}(d\lambda_1) y_k \rangle \Big) \cdots \Big(\int\limits_{\sigma(F)} \lambda_n \langle \mathcal{E}(d\lambda_n)(x) \mid \mathcal{E}(d\lambda_n) y_k \rangle \Big) =$$

$$= \sum_k \int\limits_{\sigma(F)} \cdots \int\limits_{\sigma(F)} \lambda_1 \cdots \lambda_n \langle \mathcal{E}(d\lambda_1)(x) \mid \mathcal{E}(d\lambda_1)(y_k) \rangle$$

$$\cdots \langle \mathcal{E}(d\lambda_n)(x) \mid \mathcal{E}(d\lambda_n)(y_k) \rangle = \sum_k \int\limits_{\sigma(F)} \cdots \int\limits_{\sigma(F)} \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

$$\langle \mathcal{E}(d\lambda_1) \otimes_s \dots \otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n) x^{(n)} \mid \mathcal{E}(d\lambda_1) \otimes_s \dots \otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n) y_k^{(n)} \rangle =$$

$$= \Big\langle \sum_k \int\limits_{\sigma(F)} \cdots \int\limits_{\sigma(F)} \lambda_1 \cdots \lambda_n \mathcal{E}(d\lambda_1) \otimes_s \dots \otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n) (\underbrace{x \otimes \dots \otimes x}_{n}) \mid w_n \Big\rangle.$$

Отже,

$$T_F(f_n) = \sum_n \Big\langle \int\limits_{\sigma(F)} \cdots \int\limits_{\sigma(F)} \lambda_1 \cdots \lambda_n \mathcal{E}(d\lambda_1) \otimes_s \dots \otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n) \mid w_n \Big\rangle.$$

Теорему доведено. □

Нехай δ — деяка борелівська підмножина в $\sigma(T_F)$. Позначимо

$$\overline{\Delta}_n(\delta) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \quad | \quad \lambda_1 \cdots \lambda_n \in \delta, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \sigma(F)\}.$$

Оскільки функція $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \to \lambda_1 \cdots \lambda_n$ є неперервною і множина $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \ | \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \sigma(F)\}$ є замкненою, то множина $\overline{\Delta}_n(\delta)$ є борелівською в $\mathbb{C}^n$. Тому існує інтеграл

$$\mathcal{E}_n(\delta) := \int\limits_{\overline{\Delta}_n(\delta)} \cdots \int\limits_{\overline{\Delta}_n(\delta)} \mathcal{E}(d\lambda_1) \otimes_s \dots \otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n).$$

Позначимо $\mathfrak{E}(\delta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n(\delta)$, де у випадку $n = 0$ ми розглядаємо міру Лебега на $\mathbb{C}$. З властивостей інтеграла випливає, що $\mathfrak{E}(\delta)$ є спектральною мірою, яку будемо позначати $\mathfrak{E}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. За побудовою бачимо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\sigma(T_F)} \lambda \mathcal{E}_n(d\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\overline{\Delta}_n(\delta)} \cdots \int\limits_{\overline{\Delta}_n(\delta)} \lambda_1 \cdots \lambda_n \mathcal{E}(d\lambda_1) \otimes_s \dots \otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\sigma(F)} \cdots \int\limits_{\sigma(F)} \lambda_1 \cdots \lambda_n \mathcal{E}(d\lambda_1) \otimes_s \cdots \otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n).$$

Тому за теоремою 6

$$T_F = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\sigma(T_F)} \lambda \mathcal{E}_n(d\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\sigma(F)} \cdots \int\limits_{\sigma(F)} \lambda_1 \cdots \lambda_n \mathcal{E}(d\lambda_1) \otimes_s \cdots \otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n).$$

Таким чином, ми можемо довести наступну теорему.

Теорема 7. *Обмежений нормальний оператор T_F однозначно визначає на борелівських множинах комплексної площини регулярну зліченно адитивну самоспряжену спектральну міру $\mathfrak{E}(\lambda)$, яка перетворюється в нуль на $\rho(T_F)$ і володіє тією властивістю, що*

$$g(T_F) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\sigma(F)} \cdots \int\limits_{\sigma(F)} g(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \mathcal{E}(d\lambda_1) \otimes_s \cdots \otimes_s \mathcal{E}(d\lambda_n)$$

для кожної функції g з $C(\sigma(F))$.

Доведення. Якщо приймемо $\mathfrak{E}(\lambda) = 0$, коли $\sigma(T_F)$ — порожня множина, то твердження теореми безпосередньо випливає з сформульованого вище і наслідку [3, ст. 21]. Теорему доведено. □

Згідно з теоремою 2 однозначно визначена спектральна міра $\mathfrak{E}(\lambda)$ є розкладом одиниці для оператора T_F.

Наслідок 2.1. *Якщо $F : E \to E$ — нормальний оператор і $\sigma(F)$ — спектр, то спектр оператора $T_F : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\eta$ має вигляд:*

$$\sigma(T_F) = \{\lambda_1 \cdots \lambda_n \quad | \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \sigma(F)\}.$$

Наслідок 2.2. *Нехай $F : E \to E$ — лінійний нормальний оператор. Оператор $T_F : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\eta$ — неперервний тоді і тільки тоді, коли $\|F\| \le 1$.*

Доведення. Якщо $\|F\| \le 1$, то T_F — нормальний оператор і $\sigma(T_F)$ — обмежена множина. Звідси випливає, що оператор T_F — неперервний.

Якщо $\|F\| > 1$, то існує $\lambda \in \sigma(F)$, $|\lambda| > 1$. Тому $\lambda^k \to \infty$ при $k \to \infty$. Крім того $\lambda^k \in \sigma(T_F)$ $\forall k$, тоді $\sigma(T_F)$ — необмежена множина, а отже оператор T_F — необмежений. Отримали протиріччя. Наслідок доведено. □

Зауваження 2.1. *Нехай $v(t)$ — деяка функція однієї комплексної змінної, яка неперервна на $\sigma(F)$. В загальному випадку, коли функція $v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k t^k$ — поліном, то легко бачити, що*

$$v(T_F)(f) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k (T_F)^k (f) \neq T_{v(F)}(f).$$

Проте, якщо $v(t) = t^n$, то отримаємо

$$v(T_F)(f) = T_F^n(f) = f(\underbrace{F \cdots (F(x))}_{n}) = f(F^n(x)) = T_{F^n}(f) = T_{v(t)}(f).$$

3 Спряжені оператори композиції

Нехай E — комплексний гільбертів простір. Розглянемо умови самоспряженості оператора композиції T_F, $T_F : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\eta$, $T_F(f)(x) = f(F(x))$.

Твердження 3.1. *Нехай T_F — оператор композиції на $\mathcal{H}_\eta$ для деякого аналітичного відображення F. Якщо T_F^* — оператор композиції з аналітичним відображенням G, то F і G — лінійні оператори.*

Доведення. Припустимо, що $T_F^* = T_G$. Нехай $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k$, $G = \sum_{k=0}^{\infty} G_k$, де F_k, G_k — однорідні поліноміальні відображення. Припустимо, що g_1 — деякий лінійний функціонал і f_k — довільний k-однорідний поліном. Нехай L_k — k-лінійне симетричне відображення таке, що $f_k(x) = L_k(x, \dots, x)$. Тоді

$$f_k\left(\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\right) = f_k(x_0) + nL_k(G_1(x), x_0 \cdots x_0) + \sum_{m=2}^{\infty} g_m(x),$$

де $x_0 = G_0 = G(0)$, g_m — m-однорідний поліном. Отже, для однорідного полінома f_k будемо мати:

$$\langle T_F(g_1) \mid f_k\rangle = \langle g_1(F_k(x)) \mid f_k\rangle =$$

$$= \langle g_1 \mid f_k(x_0) + nL_k(G_1(x), x_0^{k-1}) + \sum_{m=2}^{\infty} g_m(x)\rangle =$$

$$= \langle g_1 \mid nL_k(G_1(x), x_0^{k-1})\rangle.$$

Візьмемо замість $x \in E$ елемент λx, де $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle g_1(F_k(\lambda x)) \mid f_k\rangle = \lambda^k \langle g_1(F_k(x)) \mid f_k\rangle = \lambda \langle g_1 \mid nL_k(G_1(x), x_0^{k-1})\rangle.$$

Це виконується лише при $k = 1$.

Отже,

$$\langle T_F(g_1) \mid f_k\rangle = \Big\langle g_1\Big(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)\Big)\Big| f_k\Big\rangle = \Big\langle \sum_{n=0}^{\infty} g_1(F_n)\Big| f_k\Big\rangle = \langle g_1(F_k(x)) \mid f_k\rangle.$$

З іншого боку

$$\langle g_1 \mid T_G(f_k)\rangle = \Big\langle g_1\Big| f_k\Big(\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\Big)\Big\rangle.$$

Покажемо, що $F_k = 0$ при $k \neq 1$. Справді, при $k \neq 1$

$$0 = \Big\langle g_1\Big(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)\Big)\Big| f_k\Big\rangle = \langle g_1(F_k(x)) \mid f_k\rangle$$

для кожного g_1 — лінійного, f_k — k-однорідного полінома. Звідси отримуємо, що $F_k = 0$. Таким чином, F — лінійний оператор. Оскільки $T_G^* = T_F^{**} = T_F$, то G — лінійний. Твердження доведено. □

Теорема 8. *Нехай, тепер $F : E \to E$ — деяке аналітичне відображення. Припустимо, що η задовольняє умови теореми 3 для деякої відкритої кулі $U \in E$ з центром в нулі. Оператор T_F — обмежений і самоспряжений тоді і тільки тоді, коли F — самоспряжений лінійний оператор, $\|F\| \le 1$. Якщо $\|F\| > 1$, то T_F — самоспряжений необмежений оператор.*

Доведення. Якщо T_F — самоспряжений оператор, то з твердження 3.1 випливає, що F — лінійний. Крім того, $T_F(f_1) = F^*(f_1)$ для кожного лінійного фукціонала f_1. Тому F — самоспряжений.

Нехай $x, z \in E$. Внаслідок самоспряженості відображення F будемо мати:

$$\langle T_F \eta(x) \mid \eta(z)\rangle = \langle \eta(F(x)) \mid \eta(z)\rangle =$$

$$= \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \left\langle c_{[i]}^{(k)} F\left(x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}\right) \middle| c_{[i]}^{(k)} z_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)} \right\rangle = \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \left(c_{[i]}^{(k)}\right)^2 \left\langle F\left(x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}\right) \middle| z_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)} \right\rangle =$$

$$= \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \left(c_{[i]}^{(k)}\right)^2 \left\langle x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)} \middle| F\left(z_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}\right) \right\rangle = \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \left\langle c_{[i]}^{(k)} x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)} \middle| F\left(c_{[i]}^{(k)} z_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}\right) \right\rangle =$$

$$= \langle \eta(x) \mid \eta(F(z))\rangle = \langle \eta(x) \mid T_F \eta(z)\rangle.$$

Оскільки лінійна оболонка множини $\{\langle \cdot \mid \eta(z)\rangle : z \in U\}$ є щільною в $\mathcal{H}_\eta$, то $\langle T_F(f) \mid g\rangle = \langle f \mid T_F(g)\rangle \; \forall f, g \in D(T_F)$.

Отже, T_F — симетричний оператор. Тому, за наслідком 2.2, якщо F — лінійний неперервний самоспряжений оператор з E в E, то T_F — самоспряжений і замкнений. Якщо $\|F\| \le 1$, то T_F — обмежений. Теорему доведено. □

Зауважимо, що якщо F — лінійний унітарний оператор, то T_F також є унітарним оператором. Навпаки, з унітарності T_F випливає, що $T_F^* = (T_F)^{-1} = T_{F^{-1}}$. Тому F — бієктивне аналітичне відображення і F^{-1} — аналітичне. Тоді, за твердженням 3.1, F — лінійний оператор. При цьому $(T_F)^* = T_{F^*}$. Отже, F — унітарний оператор.

Означення 3.1. *φ — внутрішнє аналітичне відображення з одиничної кулі в $\mathbb{C}^2$, якщо для майже всіх $z = (z_1, z_2)$, $|z| = 1$*

$$\lim_{r \to 1^-} |\varphi(rz)| = 1.$$

В статті [9] показано, що для довільного внутрішнього відображення φ на $\mathbb{C}^2$ і невід'ємних цілих N і M відображення композиції T_F, де

$$F(z_1, z_2) = (z_1 \varphi^M(z_1, z_2), z_2 \varphi^N(z_1, z_2)) \tag{6}$$

є ізометричним оператором на просторі Харді $H^2(B_2)$.

В роботі [6] доведено існування нетривіальної внутрішньої функції $\varphi(z)$ на одиничній кулі в $\mathbb{C}^n$, яка не є раціональною функцією.

Таким чином, для довільних фіксованих N і M композиція T_F з відображенням F, яке задається формулою (6) є лінійним ізометричний (але не унітарним) оператором на просторі $\mathcal{H}_\eta = H^2(B_2)$, який є композицією з нелінійним аналітичним відображенням.

Література

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* — М.: Наука, 1966. — 543 с.
2. Березанський Ю. М., Кондратьев Ю. Г. *Спектральные методы в бесконечномерном анализе.* — К.: IM АН УРСР, 1978. — 680 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы. Спектральная теория.* — М.: Мир, 1966. — 1064 с.
4. Загороднюк А. В., Лопушанський О. В. *Класи функцій H_2 в одиничній кулі гільбертового простору*// Доповіді Національної академії наук України. — 2001, № 5. — С. 13–19.
5. Рудин У. *Функциональный анализ.* — М.: Мир, 1975. — 448 с.
6. Aleksandrov A. B., *Existence of inner functions in a ball*, Mat. Sb. Nov. Ser, **118**, № 160 (1982), 147–163.
7. Caughran J. G., *Polynomial approximation and spectral properties of composition operators on H^2*, Indiana Univ. Math. J., **21** (1971), 81–84.
8. Caughran J. G., Schwartz H. J., *Spectra of compact composition operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **51** (1970), 127–130.
9. Cima J. A., Stanton C. S., Wogen W. R., *On boundedness of composition operators on $H^2(B_2)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **91**, № 2 (1984), 217–222.
10. Cowen C. C., *Composition operators on H^2*, J. Operator Th., **9** (1983), 77–106.
11. Kamowitz H., *The spectra of composition operators on H^p*, J. Funct. Anal., **18** (1975), 132–150.
12. MacCluer B. D., Shapiro J. H., *Angular derivatives and compact composition operators on Hardy and Bergman spaces*, Canadian J. Math. **38** (1986), 878–906.
13. Nordgren E. A., *Composition operators* / E. A. Nordgren // Canadian J. Math., **20** (1968), 442–449.
14. Nordgren E. A., *Composition operators on Hilbert spaces*, Hilbert spaces operators. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, **693** (1978), 37–63.
15. Ryff J. V., *Subordinate H^p functions*, Duke Math. J., **33** (1966), 347–354.
16. Schwartz H. J., *Composition operators on H^p*, Ph. D. Thesis, Univ. of Toledo, 1969.
17. Shapiro J. H., *The essential norm of a composition operator*, Annals of Math., **125** (1987), 375–404.

Львівська комерційна академія,
Львів, Україна.

Надійшло 20.04.2009

Mozhyrovska Z.G. *Normal and self-adjoint composition operators on the space of analytic functions*, Carpathian Mathematical Publications, **1**, 1 (2009), 69–78.

We consider spectral properties of normal composition operators and investigate some properties of self-adjoint operators on space of analytic functions on Hilbert space.

Можировская З.Г. *Нормальные и самосопряженные операторы композиции на пространствах аналитических функций // Карпатские математические публикации.* — 2009. — Т.1, №1. — С. 69–78.

В статье рассматриваются спектральные свойства нормальных операторов, а также исследуются некоторые свойства самосопряженных операторов композиции на пространствах аналитических функций на гильбертовом пространстве.