Карпатські математичні публікації. Т.2, №2

Carpathian Mathematical Publications. V.2, №2

УДК 517.948:517.946

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.

ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛОГІВ ДВОСТОРОННІХ МЕТОДІВ КУРПЕЛЯ ДО ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Застосування аналогів двосторонніх методів Курпеля до звичайних диференціальних рівнянь* // Карпатські математичні публікації. — 2010. — Т.2, №2. — С. 48–54.

Побудовано і досліджено аналоги двосторонніх методів Курпеля наближеного розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, які дозволяють отримувати надлінійну збіжність у випадку недиференційовної правої частини.

Вступ

Застосування двосторонніх наближених методів на практиці часто утруднене через те, що в теорії двосторонніх монотонних методів фігурують вимоги про монотонність та про опуклість операторів у відповідних рівняннях. Істотний вклад М.С. Курпеля в теорію двосторонніх методів стосується побудови таких нових двосторонніх методів, обґрунтування яких не потребує монотонності і опуклості правих частин вихідних рівнянь. Двосторонні методи Курпеля зберігають найважливіші властивості методу Чаплигіна (див. [2, 3]). В [7] започатковано ідею врахування збурень у правих частинах лінеаризованих доданків методів Курпеля і Чаплигіна таким способом, що пропоновані алгоритми окреслюють також і стратегію врахування похибок заокруглення зі збереженням двосторонньої монотонності апроксимації розв'язку рівняння і квадратичної швидкості збіжності ітерацій до розв'язку. У цьому повідомленні досліджені аналоги двосторонніх методів Курпеля у застосуванні до задачі Коші

$$x'(t) = g(t, x(t)) - h(t, x(t)), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Основна ідея пропонованих алгоритмів полягає у поширенні зініційованого М.С. Курпелем в [3] підходу до рівняння (1) таким способом, щоб вони були застосовними до рівняння вигляду (1) з неопуклою правою частиною, яка не обов'язково є диференційовною.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34A45.

Ключові слова і фрази: двосторонні методи, часткова ліпшицієвість, неперервна дифренційовність.

1 Постановка задачі

В задачі (1), (2) будемо вважати $g(t,x(t)), h(t,x(t))$ дійсними неперервними функціями при $t \in [t_0,T]$, $x \in S(x_0,M) = \{x||x-x_0| \le M, x \in R^1\}$ (R^1 — множина дійсних чисел). Шукатимемо розв'язок задачі (1), (2) у класі неперервно диференційовних на $[t_0,T]$ функцій.

Умовою B_1 назвемо припущення про існування таких неперервних при $t \in [t_0,T]$, $y,z \in S(x_0,M)$ функцій $a_1(t,y,z)$, $\alpha_1(t,y,z)$, $b_1(t,y,z)$, $\beta_1(t,y,z)$, для яких із співвідношень $t \in [t_0,T]$, $y,z \in S(x_0,M)$ випливає:

$$(a_1(t,y,z)+\alpha_1(t,y,z))(z-y) \le g(t,z)-g(t,y), \tag{3}$$

$$(b_1(t,y,z)+\beta_1(t,y,z))(z-y) \le h(t,z)-h(t,y).$$

При цьому функції $a_1(t,y,z)$, $\alpha_1(t,y,z)$, $b_1(t,y,z)$, $\beta_1(t,y,z)$ не спадають по y, не зростають по z і $a_1(t,y,z) \ge 0$, $\alpha_1(t,y,z) \ge 0$, $b_1(t,y,z) \ge 0$, $\beta_1(t,y,z) \ge 0$.

Умову (3) будемо називати частковою ліпшицієвістю. Вважатимемо заданими неперервно диференційовні функції $u(t), v(t)$, для яких

$$u(t_0) \le x_0 \le v(t_0) \quad (t \in [t_0,T]), \tag{4}$$

$$u(t) \le v(t), \tag{5}$$

$$u'(t) \le g(t,u(t)) - h(t,v(t)), \tag{6}$$

$$v'(t) \ge g(t,v(t)) - h(t,u(t)) \quad (t \in [t_0,T]),$$

причому $u(t), v(t) \in S(x_0,M)$ при $t \in [t_0,T]$. Позначатимемо $[u(t),v(t)] = \{x(t)|u(t) \le x(t) \le v(t)\}$. Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$y_0(t) = u(t), z_0(t) = v(t) \tag{7}$$

$$y'_{n+1}(t) = a_1(t,y_n(t),z_n(t))(y_{n+1}(t)-y_n(t)) -$$

$$b_1(t,y_n(t),z_n(t))(z_{n+1}(t)-z_n(t)) + g(t,y_n(t)) - h(t,z_n(t)), \tag{8}$$

$$z'_{n+1}(t) = (a_1(t,y_n(t),z_n(t)) + \alpha_1(t,y_n(t),z_n(t)))(z_{n+1}(t)-z_n(t)) -$$

$$(b_1(t,y_n(t),z_n(t)) + \beta_1(t,y_n(t),z_n(t)))(y_{n+1}(t)-y_n(t)) + g(t,z_n(t)) - h(t,y_n(t)),$$

$$y_{n+1}(t_0) = z_{n+1}(t_0) = x_0. \tag{9}$$

Теорема 1. *Нехай справджується умова B_1 і задані функції $u(t), v(t)$ задовольняють співвідношення (4)–(6). Тоді для ітераційного процесу (7)–(9) мають місце співвідношення*

$$y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le z_{n+1}(t) \le z_n(t), \tag{10}$$

де $n = 0,1,...,t \in [t_0,T]$

Доведення. Формули (7) і нерівність (5) означають, що $y_0(t) \leq z_0(t)$. Із (6) та (8) для $n = 0$ випливає, що

$$y_1'(t) - y_0'(t) \geq a_1(t, y_0(t), z_0(t))(y_1(t) - y_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t))(z_0(t) - z_1(t)),$$

$$z_0'(t) - z_1'(t) \geq (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_0(t) - z_1(t)) + (b_1(t, y_0(t), z_0(t))+$$
$$\beta_1(t, y_0(t), z_0(t)))(y_1(t) - y_0(t)).$$

Звідси за теоремою про диференціальні нерівності [2] маємо, що при $t \in [t_0, T]$

$$y_1(t) \geq y_0(t), \quad z_1(t) \leq z_0(t).$$

Крім того, з (8) та (3) випливає

$$z_1'(t) - y_1'(t) = (a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_1(t) - y_1(t))-$$
$$(a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_0(t) - y_0(t))-$$
$$\alpha_1(t, y_0(t), z_0(t))(z_0(t) - z_1(t)) - \beta_1(t, y_0(t), z_0(t))(y_1(t) - y_0(t)) + g(t, z_0(t))-$$
$$g(t, y_0(t)) + h(t, z_0(t)) - h(t, y_0(t)) \geq$$
$$(a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \beta_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_1(t) - y_1(t))+$$
$$\alpha_1(t, y_0(t), z_0(t))(y_1 - y_0) + \beta_1(t, y_0(t), z_0(t))(z_0(t) - z_1(t)) \geq$$
$$(a_1(t, y_0(t), z_0(t)) + b_1(t, y_0(t), z_0(t)) + \alpha_1(t, y_0(t), z_0(t))+$$
$$\beta_1(t, y_0(t), z_0(t)))(z_1(t) - y_1(t)).$$

Знову скориставшись теоремою про диференціальні нерівності, робимо висновок, що при $t \in [t_0, T]$

$$y_1(t) \leq z_1(t).$$

Отже, співвідношення (10) доведені для $n = 0$. Припускаючи їх справедливість при $n = k - 1$, при $n = k$ із (8), (9) та умови B_1 маємо:

$$y_{k+1}'(t) - y_k'(t) = g(t, y_k(t)) - g(t, y_{k-1}(t)) + h(t, z_{k-1}(t)) - h(t, z_k(t))+$$
$$a_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t))-$$
$$a_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(y_k(t) - y_{k-1}(t)) - b_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(z_{k-1}(t) - z_k(t)) \geq$$
$$a_1(t, y_{k-1}(t), y_k(t)) + \alpha_1(t, y_{k-1}(t), y_k(t))(y_k(t) - y_{k-1}(t))+$$
$$b_1(t, z_k(t), z_{k-1}(t)) + \beta_1(t, z_k(t), z_{k-1}(t))(z_{k-1}(t) - z_k(t))+$$
$$a_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t))-$$
$$a_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(y_k(t) - y_{k-1}(t)) - b_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t))(z_{k-1}(t) - z_k(t)) \geq$$
$$a_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t)),$$

$$z_k'(t) - z_{k+1}'(t) = g(t, z_{n-1}(t)) - g(t, z_n(t)) + h(t, y_n(t)) - h(t, y_{n-1}(t))+$$

$$(a_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t)))(z_k(t) - z_{k+1}(t))+$$

$$(b_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \beta_1(t, y_k(t), z_k(t)))(y_{k+1}(t) - y_k(t))-$$

$$(a_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)) + \alpha_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)))(z_{k-1}(t) - z_k(t))-$$

$$(b_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)) + \beta_1(t, y_{k-1}(t), z_{k-1}(t)))(y_k(t) - y_{k-1}(t)) \geq$$

$$(a_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t)))(z_k(t) - z_{k+1}(t))+$$

$$(b_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \beta_1(t, y_k(t), z_k(t)))(y_{k+1}(t) - y_k(t)),$$

$$z'_{k+1}(t) - y'_{k+1}(t) = g(t, z_n(t)) - g(t, y_n(t)) + h(t, z_n(t)) - h(t, y_n(t))-$$

$$\alpha_1(t, y_k(t), z_k(t))(z_k(t) - z_{k+1}(t)) - \beta_1(t, y_k(t), z_k(t))(y_{k+1}(t) - y_k(t))+$$

$$(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t))-$$

$$(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_n(t) - y_n(t)) \geq$$

$$(a_1(t, y_k(t), z_k(t)) + b_1(t, y_k(t), z_k(t)) + \alpha_1(t, y_k(t), z_k(t))+$$

$$\beta_1(t, y_k(t), z_k(t)))(z_{k+1}(t) - y_{k+1}(t)).$$

З отриманих співвідношень, враховуючи теорему про диференціальні нерівності, одержуємо, що

$$y_{k+1}(t) - y_k(t) \geq 0, \quad z_k(t) - z_{k+1}(t) \geq 0, \quad z_{k+1}(t) - y_{k+1}(t) \geq 0.$$

Це означає, що нерівності (10) виконуються і при $n = k$. Згідно з принципом математичної індукції, теорему вважаємо доведеною. □

При виконанні умов теореми можна гарантувати збіжність ітераційного процесу (7)–(9) до неперервно диференційовних компонент $y(t), z(t)$ розв'язку $(y(t), z(t))$ системи рівнянь

$$y'(t) = g(t, y(t)) - h(t, z(t)), \tag{11}$$

$$z'(t) = g(t, z(t)) - h(t, y(t))$$

з початковою умовою

$$y(t_0) = z(t_0) = x_0. \tag{12}$$

Точніше, послідовності $\{y_n(t)\}$ та $\{z_n(t)\}$, утворені за допомогою ітераційного процесу (7)–(9), збігаються рівномірно, монотонно не спадаючи до $y(t)$ та монотонно не зростаючи до $z(t)$ неперервно диференційовних на $[t_0, T]$ компонент розв'язку $(y(t), z(t))$ задачі (11), (12). Це випливає з рівномірної обмеженості і рівностепеневої неперервності послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ та з їх монотонності. Однак умови теореми не забезпечують, взагалі кажучи, збіжності кожної з цих послідовностей або однієї з них до розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 2. *Нехай справджуються умови теореми (1) і, крім того, задача (11), (12) має єдиний неперервно диференційовний на* $[t_0, T]$ *розв'язок* $(y(t), z(t))$. *Тоді для єдиного неперервно диференційовного на* $[t_0, T]$ *розв'язку* $x(t)$ *задачі (1), (2) та послідовностей* $\{y_n(t)\}$ *та* $\{z_n(t)\}$, *утворених за допомогою формул (7)–(9), при* $n = 0, 1, ..., t \in [t_0, T]$ *мають місце співвідношення*

$$y_n(t) \leq y_{n+1}(t) \leq x(t) \leq z_{n+1}(t) \leq z_n(t),$$

причому ці послідовності рівномірно збігаються до $x(t)$ *на* $[t_0, T]$, *відповідно не спадаючи та не зростаючи.*

Доведення. Оскільки $(y(t), z(t))$ є розв'язками задачі (11), (12) і розв'язком цієї задачі є також пара $(x(t), x(t))$, то з попереднього зауваження і з існування розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2) випливає, що $y(t) = z(t) = x(t)$. Тому можна вважати теорему доведеною. □

Для отримання оцінок збіжності процесу (7)–(9) умов попередніх двох теорем, зокрема, часткової ліпшицієвості (3) правої частини рівняння (1) недостатньо.

Умовою B_2 *назвемо припущення про те, що при* $t \in [t_0, T]$, $y \leq z$, $y, z \in S(x_0, M)$ *справджуються нерівності*

$$g(t, z) - g(t, y) \leq (a_1(t, y, z) + \alpha_2(t, y, z))(z - y),$$

$$h(t, z) - h(t, y) \leq (b_1(t, y, z) + \beta_2(t, y, z))(z - y)$$

з тими ж самими функціями $a_1(t, y, z)$, $b_1(t, y, z)$, які фігурують в умові B_1 й неперервними невід'ємними функціями $\alpha_2(t, y, z))$, $\beta_2(t, y, z)$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* B_1 *та* B_2 *і функції* $y_n(t), z_n(t)$ *при* $n = 0, 1, ...$ *задовольняють співвідношення (7)–(9). Тоді при* $n = 0, 1, ..., t \in [t_0, T]$ *мають місце оцінки*

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) \leq f_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + f_n^{(1)}(t)(z_n(t) - y_n(t)), \tag{13}$$

та

$$z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t) \leq \int_{t_0}^{t} f_n^{(1)}(s) \exp \int_{s}^{t} f_n^{(2)}(\xi) d\xi (z_n(s) - y_n(s)) ds, \tag{14}$$

де

$$f_n^{(1)}(t) = \alpha_2(t, y_n(t), z_n(t)) + \beta_2(t, y_n(t), z_n(t)), \tag{15}$$
$$f_n^{(2)}(t) = \alpha_1(t, y_n(t), z_n(t)) + \beta_1(t, y_n(t), z_n(t))$$

Доведення. Із (7)–(10) та з умови B_2 випливає, що

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) = g(t, z_n(t)) - g(t, y_n(t)) + h(t, z_n(t)) - h(t, y_n(t)) -$$

$$\alpha_1(t, y_n(t), z_n(t))(z_n(t) - z_{n+1}(t)) - \beta_1(t, y_n(t), z_n(t))(y_{n+1}(t) - y_n(t)) +$$

$$(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) -$$

$$(a_1(t, y_n(t), z_n(t)) + b_1(t, y_n(t), z_n(t)))(z_n(t) - y_n(t)) \leq$$

$$(a_1(t,y_n(t),z_n(t))+\alpha_2(t,y_n(t),z_n(t))(z_n(t)-y_n(t))+$$
$$(b_1(t,y_n(t),z_n(t))+\beta_2(t,y_n(t),z_n(t)))(z_n(t)-y_n(t))+$$
$$(a_1(t,y_n(t),z_n(t))+b_1(t,y_n(t),z_n(t)))(z_{n+1}(t)-y_{n+1}(t))-$$
$$(a_1(t,y_n(t),z_n(t))+b_1(t,y_n(t),z_n(t)))(z_n(t)-y_n(t))=$$
$$f_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(t)-y_{n+1}(t))+f_n^{(1)}(t)(z_n(t)-y_n(t)),$$

тобто маємо оцінку (13). Оцінка (14) випливає з (13), якщо скористатись теоремою про диференціальні нерівності [6]. □

Зауваження 1.1. *Характер збіжності процесу (7)–(9) визначається структурою функцій* $a_1(t,y,z)$, $b_1(t,y,z)$, $\alpha_2(t,y,z)$, $\beta_2(t,y,z)$. *Якщо, зокрема,*

$$\alpha_2(t,y,z)=\alpha_3(t,y,z)(z-y)^\gamma,\quad \beta_2(t,y,z)=\beta_3(t,y,z)(z-y)^\gamma\quad(\gamma\ge 0),$$

де $\alpha_3(t,y,z),\beta_3(t,y,z)$ *неперервні невід'ємні при* $t\in[t_0,T], y\le z, y,z\in S(x_0,M)$, *то згідно з (14),*

$$f_n^{(1)}(t)=(\alpha_3(t,y(t),z(t))+\beta_3(t,y(t),z(t)))(z_n(t)-y_n(t))^\gamma. \tag{16}$$

Підставляючи (15) в (14), при $\gamma>0$ для ітераційного процесу (7)–(9) отримуємо надлінійну збіжність, а при $\gamma=1$ та $\gamma>1$ ітераційний процес (7)–(9) характеризується квадратичною і, відповідно, надквадратичною збіжністю. У тому випадку, коли

$$a_1(t,y,z)=\frac{\partial g(t,y)}{\partial y},\quad b_1(t,y,z)=\frac{\partial h(t,y)}{\partial y},$$

$$\alpha_2(t,y,z)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t,y)}{\partial y^2}(z-y),\quad \beta_2(t,y,z)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h(t,y)}{\partial y^2}(z-y),$$

матимемо квадратичну збіжність при $\gamma=1$, і отримані результати охоплюють відповідні результати М.С. Курпеля із [2, 3]. Якщо, крім того, одна із функцій $g(t,x)$ або $h(t,x)$ тотожно дорівнює нулю, то результати, які отримуються із наведених теорем, описують основні властивості методу Чаплигіна і багатьох його різновидів.

Зауваження 1.2. *Відмінність алгоритму (7)–(9) від алгоритмів М.С. Курпеля з [2, 3] стосується можливості отримати надлінійну збіжність алгоритму для недиференційовних функцій* $g(t,x)$ *або* $h(t,x)$.

Література

1. Казімірський П.С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.:Наукова думка, 1981. – 224с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.– М: Наука, 1977.– 741 с.
3. Курпель М.С. *Про деякі модифікації методу С.О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь* // Доп.АНУРСР. Сер.А. – 1996, №4.– С. 303-306.
4. Маршус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных печков. – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.

5. Обшта А., Шувар Б. *Гіллясті дроби та ітераційні алгоритми для апроксимації коренів поліномів* // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки –2009.– С.294–295.

6. Рисс Ф. Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М: ЧЛ, 1954. – 589 с.

7. Рудин У. Функциональный анализ. – М: Мир, 1975. – 443 с.

8. Шувар Б.А., Шуляр М.А. *Про нулі полінома із коефіцієнтами із алгебри Банаха* // Вісник Львівського політехнічного інституту. Математика. Механіка. – Т.119 – 1977.

9. Kaczorek T. Polinomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory, Springer: Communications and Control Engineering.Dordrecht, 2007 – 503 p.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Надійшло 06.10.2010

Kopach M.I., Obshta A.F., Shuvar B.A. *An application of analogues of two-sided Kurpel's methods to ordinary differential equation*, Carpathian Mathematical Publications, **2**, 2 (2010), 48–54.

An analogues of two-sided Kurpel's methods of approximate solution of ordinary differential equation that give possibility to get above-linear convergence in the case of nondifferential right part are constructed and investigated.

Копач М.И., Обшта А.Ф., Шувар Б.А. *Применение аналогов двусторонних методов Курпеля к обыкновеным дифференциальным уравнениям* // Карпатские математические публикации. — 2010. — Т.2, №2. — С. 48–54.

Построены и иследованы аналоги двусторонних методов Курпеля приближенного решения обыкновевеных дифференциальных уравнений, которые позволяют получать скорость сходимости выше линейной в случае недифференцируемой правой части.