

ДИНАМІЧНІ КОНТРАКТИ В УМОВАХ НЕПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Запропоновано і проаналізовано дискретну динамічну модель принципала-агента в умовах неповної інформації. Знайдено умови оптимального контракту в кожен момент часу.

Ключові слова: принципал, агент, тип агента, динамічна модель.

DYNAMIC CONTRACTING UNDER IMPERFECT INFORMATION

We develop and analyse a discrete dynamic principal-agent model under assumptions of imperfect information. Conditions for optimal contracts in each moment of time are found.

Keywords: principal, agents, type of agent, dynamic model.

Вступ. У запропонованій статті розглянуто динамічну модель принципала-агента в умовах неповної інформації. Динамічна модель контракту має відмінності від статичної, оскільки після того, як агент вибирає контракт, принципал отримує деяку інформацію про тип агента і може цю інформацію використовувати в наступний момент часу. В залежності від домовленостей, розглядають динамічні моделі контрактів, в яких є можливість гарантувати відсутність перегляду контрактів і контракти, які передбачають двосторонній перегляд контрактів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теорія управління в даний момент широко використовує теорію контрактів, зокрема теорію принципала-агента [1,3]. Мікроекономічні проблеми принципал-агент можуть виникати між: власниками і керівником; роботодавцем і працівником; кредитором і боржником; інвестором і його портфельним менеджером. Загальні теоретичні основи побудови, дослідження і використання даних відносин розглядали Р. Bolton, М. Dewatripont, J. Mirrlees, В.В. Вітлінський, В.В. Бурков, Д.А. Новіков та інші [4,5].

Методика досліджень. У роботі застосовано сукупність загальних та спеціальних методів і підходів. За допомогою загальних методів наукової абстракції, системного підходу, групування і класифікації проаналізовано вимоги до динамічних моделей теорії контрактів в умовах неповної інформації і класифіковано основні способи її побудови і рішення. Для побудови динамічної моделі, застосовано методи математичного аналізу та теорії оптимізації.

Модель управління поведінкою виконавця полягає в тому, що взаємодія передбачає наявність двох індивідів: агента (виконавця) і принципала (поручителя) [1]. Агент вибирає одну з можливих видів дій, які впливають і на його добробут і на добробут принципала. Згідно цього принципал не може стежити за діями агента і бачить тільки результат. Проте будь-який результат залежить не тільки від дій агента, але й від випадкових подій, обумовлених змінами в навколишньому середовищі. В результаті принципал не може зробити яких-небудь певних висновків про дії агента, просто розглядаючи дані про фактичні результати. Проте при певних припущеннях про агента (тобто інформації про переваги агента і функції розподілу типів) принципал може встановити для агента схему винагороди, яка залежить від результатів. Крім того, створюється ситуація, коли агент максимізує не тільки свою власну корисність, але й корисність принципала.

Метою даної праці є розробка загального методу знаходження оптимального контракту для дискретної моделі, у якій як принципал, так і агент мають неповну інформацію про реальну якість проекту, і оновлюють цю інформацію на підставі результатів проекту за попередні періоди.

Основні припущення моделі. Розглянемо дискретну модель контрактів агента – принципала. Ми розглядаємо скінченний часовий горизонт $[0, T]$ з датами $0, \Delta t, 2 \Delta t, \dots, T - \Delta t, T$.

Виграш проекту, який ми отримуємо за період T , дорівнює:

$$V_T = V_0 + \sum_{t=0}^{T-\Delta t} \Delta V_t$$

Вважаємо, що V_t – внесок в проектний остаточний виграш принципала і агента, здійснений в період часу $[t, t + \Delta t]$. В майбутньому ми вважаємо це приростом виграшу в момент часу $[t, t + \Delta t]$.

Додатковий виграш ΔV_t має дві складові: базову $\theta \Delta_t + s(W_{t+\Delta t} - W_t)$, яка є нормально розподіленою випадковою величиною і не залежить від дій агента і принципала і дискреційну $\Phi(c_t, \eta_t) \Delta_t$, яка є детермінованою величиною і залежить від інвестицій принципала і зусиль агента. Отже, ΔV_t дорівнює:

$$\Delta V_t = \theta \Delta_t + s(W_{t+\Delta t} - W_t) + \Phi(c_t, \eta_t) \Delta_t$$

Величина θ являє собою темп зростання проекту, яка характеризує внутрішні властивості проекту. Можна вважати, що θ відображає здатність агента. Принципал і агент не мають досконалої інформації щодо величини θ , вони лише припускають, що θ нормально розподілена з параметрами $N(\mu_0^{Pr}, \sigma_0^2)$ і $N(\mu_0^{Ag}, \sigma_0^2)$ відповідно. Це означає, що вони можуть не погоджуватись щодо величини θ .

Ми не робимо ніяких припущень щодо правильності проекту і якості розподілу, оскільки від них не залежить рівновага. Ми можемо розглядати загальні сценарії, в яких агент є песимістичнішим або оптимістичнішим порівняно з принципалом. Для спрощення обмежимося випадком, коли агент є оптимістом відносно принципала.

Позначимо $\Omega_0 = \mu_0^{Ag} - \mu_0^{Pr}$ ступінь оптимізму агента у нульовий момент часу.

Друга компонента в сумі $s(W_{t+\Delta t} - W_t) = s \Delta W_t$, де $s > 0$ – константа, W – стандартний броунівський рух, є незалежною від θ величиною, яка характеризує ризик проекту на періоді $[t, t + \Delta t]$. Ми називаємо s^2 внутрішнім проектним ризиком.

В дискретному періоді принципал і агент, інвестуючи капітал і зусилля, планують отримати свою норму прибутку. Позначимо зусилля агента через η_t , норму інвестицій для принципала c_t . Тоді виграш проекту, який залежить від норми інвестицій принципала і зусиль агента, дорівнює: $\Phi(c_t, \eta_t) = A c_t^\alpha \eta_t^\beta$, $\alpha > 0, \beta > 0$.

Принципал і агент оновлюють свої апріорні уявлення про проект. Оскільки зусилля агента не спостережувані для принципала, принципал має апостеріорні оцінки проекту, які якісно залежать від умовиводів, що ґрунтуються на минулих зусиллях агента.

Нехай η_t^{Pr} означає логічний висновок принципала про зусилля агента на інтервалі $[t; t + \Delta t]$, η_t^{Ag} означає зусилля агента на інтервалі $[t; t + \Delta t]$.) Звідси випливає за формулами Байєса [2], що для агента і принципала оновлені оцінки розподілу θ в періоди $t \in \{ \Delta t, \dots T \}$ будуть нормальними з параметрами $N(\mu_t^{Pr}, \sigma_t^2)$, $N(\mu_t^{Ag}, \sigma_t^2)$, де

$$\sigma_t^2 = \frac{s^2 \sigma_0^2}{s^2 + t \sigma_0^2}$$

$$\mu_{t+\Delta t}^{Pr} = \frac{s^2 \mu_t^{Pr} + \sigma_t^2 (\Delta V_t - \Phi(c_t, \eta_t^{Pr}) \Delta t)}{s^2 + \Delta t \sigma_t^2}$$

$$\mu_{t+\Delta t}^{Pr} = \frac{s^2 \mu_t^{Ag} + \sigma_t^2 (\Delta V_t - \Phi(c_t, \eta_t^{Ag}) \Delta t)}{s^2 + \Delta t \sigma_t^2} = \frac{s^2 \mu_t^{Ag} + \sigma_t^2 (\theta \Delta t + s \Delta W_t)}{s^2 + \Delta t \sigma_t^2}$$

Зауважимо, що оцінки інвестицій c_t , зусилля агента η_t^{Ag} і висновки принципала про зусилля агента η_t^{Pr} є визначені на початку періоду $t + \Delta t$. Отже, вирази $\Phi(c_t, \eta_t^{Ag})$ і $\Phi(c_t, \eta_t^{Pr})$ є детерміністичними залежно від наборів інформації відповідно принципала і агента на момент t . З попередніх формул випливає:

$$\mu_t^{Pr} = \frac{s^2 \mu_0^{Pr} + \sigma_0^2 \sum_{u=0}^{t-\Delta t} (\Delta V_u - \Phi(c_t, \eta_t^{Pr}) \Delta t)}{s^2 + t \sigma_0^2}$$

$$\begin{aligned} \mu_t^{Ag} &= \frac{s^2 \mu_0^{Ag} + \sigma_0^2 \sum_{u=0}^{t-\Delta t} (\Delta V_u - \Phi(c_t, \eta_t^{Ag}) \Delta t)}{s^2 + t \sigma_0^2} \\ &= \frac{s^2 \mu_0^{Ag} + \sigma_0^2 \sum_{u=0}^{t-\Delta t} (\theta \Delta t + s \Delta W_u)}{s^2 + t \sigma_0^2} \end{aligned}$$

Ступінь невизначеності σ_0^2 апостеріорних оцінок принципала і агента внутрішньої якості проекту θ – це тимчасовий проектний ризик. Невизначеність розв'язується (спадає) з часом, коли принципал і агент оновлюють свої оцінки θ . Зауважимо, оскільки агент знає свої власні вибори, його апостеріорні оцінки якості проекту не залежать від його попередніх виборів зусиль. З іншого боку, обрані агентом зусилля впливають на розвиток змінної стану V , з останньої формули випливає, що агент може впливати на

апостеріорні оцінки принципала через свій вибір зусиль. Оскільки принципал правильно робить висновок про вибори зусиль агента, його апостеріорні оцінки не залежать від попередніх зусиль агента по досягненню рівноваги.

Нехай Ω_t означає рівноважний ступінь оптимізму агента на момент t . Тоді:

$$\Omega_t = \mu_t^{Ag} - \mu_t^{Pr} = \Omega_0 \frac{s^2}{s^2 + t\sigma_0^2}$$

Укладення контрактів.

Принципал пропонує агентові контракт в нульовий момент часу. Контракт описує капітальні інвестиції принципала в кожен момент часу і його можливий виграш. Даний контракт може явним чином залежати від ΔV_t . Як прийнято в традиційній літературі по контрактах, зручно доповнити визначення контракту описом рекомендованих зусиль агента. Тоді контракт повинен задовольняти умову сумісності стимулів. Далі, ми дозволяємо для контракту перегляд в визначені моменти часу в інтересах обох сторін.

Оскільки зусилля агента є неспостережувані для принципала, існує несприятливий відбір в проміжні дати. Невідомий тип агента на дату $t > 0$ – це послідовність його попередніх виборів, котрі впливають на його апостеріорну оцінку μ_t^{Ag} . Принципал формує висновки на основі минулих виборів агента.

Нехай $\{\mathbf{F}_t^{Pr}\}$ – фільтрація принципала (інформація, яка відома про принципала в попередні моменти) в моменти $\{0, \Delta t, \dots, T\}$, яка породжується історією додаткових виплат принципала, інвестиціями принципала та умовиводами принципала про агентові вибори $\{\eta_t^{Pr}\}$. Нехай також $\{\mathbf{F}_t^{Ag}\}$ – фільтрація агента (інформація, яка відома про агента в попередні моменти) в моменти $\{0, \Delta t, \dots, T\}$, яка породжується історією додаткових виплат принципала, інвестиціями принципала та дійсними виборами агента $\{\eta_t^{Ag}\}$.

Контракт описується як $\{Q_T, c, \eta\}$, де $Q_T \in \{\mathbf{F}_t^{Pr}\}$ -вимірним процесом, а $c, \eta \in \{\mathbf{F}_t^{Pr}\}$ -адаптованими процесами. Q_T є обіцяний принципалові контрактом виграш на період T , тому $P_t = V_t - Q_t$ є виграшем агента, $c_t \Delta t$ є інвестиціями принципала, η_t є рекомендованими зусиллями для агента на інтервалі $[t, t + \Delta t]$.

Принципал є ризик-нейтральним, в той час як агент є схильний до ризику з перевагами CARA. Їх відповідні ставки дисконтування приймемо рівними

нулю для спрощення викладок. Очікувана корисність агента на момент початку контракту від контракту $\{Q_T, c, \eta\}$ дорівнює:

$$- E_0^{Ag} \left\{ \exp \left(-\lambda \left[P_T - \sum_{t=0}^{T-\Delta t} k \eta_t^y \Delta t \right] \right) \right\}$$

Параметр $\lambda \geq 0$ характеризує схильність до ризику агента, $k \eta_t^y \Delta t$ марність зусиль агента на інтервалі $[t, t + \Delta t]$.

Визначимо обіцяний вигреш принципала Q_t на момент $t \in \{0, \Delta t, \dots, T\}$ як очікуваний у майбутньому вигреш принципала, менший на суму інвестованого капіталу за контрактом, тобто

$$Q_t = E_t^{Pr} \left\{ Q_T - \sum_{u=t}^{T-\Delta t} c_u \Delta t \right\}$$

На майбутнє вважаємо $P_t = V_t - Q_t$ часткою агента на дату t .

Для нашого аналізу зручним є означити коефіцієнт корисності продовження контракту агентом на дату t через CUR_t^{Ag} . Тут верхній індекс означає, що йдеться про корисність з погляду інформації і уявлень агента. Оскільки агент має негативну експоненціальну функцію корисності, то коефіцієнт корисності агента дорівнює:

$$CUR_t^{Ag} = E_t^{Ag} \left\{ \exp \left(-\lambda \left[P_T - P_t - \sum_{t=0}^{T-\Delta t} k \eta_t^y \Delta t \right] \right) \right\}$$

де E_t^{Ag} – умовне математичне сподівання агента на основі інформації та уявлень на момент t .

Нарешті, контракт є стійким до переукладання в кожен момент часу, тобто продовження контракту максимізує корисність агента за умови надання обіцяного виграшу Q_t принципалу. Іншими словами, проект має бути послідовно оптимальним на кожен момент часу.

1. Контракт $(Q^{T-\Delta t}, c^{T-\Delta t}, \eta^{T-\Delta t})$ на останній період $[T - \Delta t, T]$ розв'язує задачу:

$$\begin{aligned} & (Q^{T-\Delta t}, c^{T-\Delta t}, \eta^{T-\Delta t}) = \\ & = \arg \min_{(Q^{T-\Delta t}, c^{T-\Delta t}, \eta^{T-\Delta t}) \in \mathbb{E}^{T-\Delta t}} E_{T-\Delta t}^{Ag} \left\{ \exp(-\lambda [P'_T - P'_{T-\Delta t} - k(\eta'_{T-\Delta t})^y \Delta t]) \right\} \end{aligned}$$

при обмеженнях

$$Q'_{T-\Delta t} \geq Q_{T-\Delta t}.$$

2. Контракт (Q^t, c^t, η^t) на довільну дату $t < T - \Delta t$ розв'язує задачу:

$$(Q^t, c^t, \eta^t) == \arg \min_{(Q'^t, c'^t, \eta'^t) \in \Xi^t} E_t^{Ag} \left\{ \text{Texp} \left(-\lambda \left[P'_T - P'_t - \sum_{u=t}^{T-\Delta t} k(\eta'_u)^y \Delta t \right] \right) \right\}$$

при обмеженнях

$$Q'_t \geq Q_t.$$

Таким чином, контракт (Q^t, c^t, η^t) є оптимальним контрактом серед контрактів, які задовольняють умови сумісності стимулів, стійкі до переукладання і гарантують принципалу обіцяну плату Q_t на дату t .

Висновки. Ми запропонували метод знаходження оптимального динамічного контракту у припущеннях моделі, коли і агент, і принципал мають неповну інформацію про якість контракту, виражену у формі нормальних розподілів зі спільним середньоквадратичним відхиленням, і ця інформація оновлюється перед початком кожного наступного періоду виконання контракту.

Література

1. Cabrales A. Optimal Contracts, Adverse Selection and Social Preferences: an Experiment. Електронний ресурс. Режим доступу: <http://www.econ.upt.edu/docs/papers/downloads/478.pdf>.
2. Oksendal B. Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications, Sixth Edition, Springer Verlag, Heidelberg, Germany, 2003.
3. А. Бремзен, Конспект лекцій по теории контрактов/ А. Бремзен, С. Гуриев. Електронний ресурс. Режим доступу: www.nes.ru/dataupload/files/programs/econ/preprints/2005/GurievBremzen.pdf
4. Бурков В.Н., А. Введение в теорию активных систем / Бурков В.Н., Новиков Д.А. – М.:ИПУ РАН, 1996. –125 с.
5. Вітлінський В.В. Економічний ризик: ігрові моделі / В.В. Вітлінський, П.І. Верченко, А.В. Сігал, Я.С. Наконечний. – КНЕУ, 2002. – 446 с.

References

1. Cabrales A. Optimal Contracts, Adverse Selection and Social Preferences: an Experiment. Elektronnyi resurs. Rezhym dostupu: <http://www.econ.upt.edu/docs/papers/downloads/478.pdf>.
2. Oksendal B. Stochastic Differential Equations: an Introduction with Applications, Sixth Edition, Springer Verlag, Heidelberg, Germany, 2003.
3. A. Bremzen, Konspekt lektsyi po teoryi kontraktov/ A. Bremzen, S. Huryev. Elektronnyi resurs. Rezhym dostupu: www.nes.ru/dataupload/files/programs/econ/preprints/2005/GurievBremzen.pdf
4. Burkov V.N., A. Vvedenye v teoryiu aktyvnykh system / Burkov V.N., Novykov D.A. – M.: YPU RAN, 1996. – 125 s.
5. Vitlinskyi V.V. Ekonomichnyi ryzyk: ihrovi modeli / V.V. Vitlinskyi, P.I. Verchenko, A.V. Sihal, Ya.S. Nakonechnyi. – KNEU, 2002. – 446 s.